ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Скасків Лілія Василівна

УДК 512.54+512.554

ГРУПИ, БАГАТІ БЛИЗЬКИМИ ДО НІЛЬПОТЕНТНИХ ПІДГРУПАМИ

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Науковий керівник
Артемович Орест Дем'янович
доктор фізико-математичних
наук, професор

ЛЬВІВ – 2012

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – множина натуральних чисел,

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – розширена множина натуральних чисел,

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел,

$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел,

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел,

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел,

$\mathbb{F}_q$ – скінченне поле із q елементів,

$H \leq G$ – H – підгрупа в групі G,

$H < G$ – H – власна підгрупа в G,

$H \lhd G$ – H – нормальна підгрупа в G,

$H^a = a^{-1}Ha$ – підгрупа, спряжена до підгрупи H за допомогою елемента a,

G/H – фактор-група групи G за підгрупою H,

$|G : H|$ – індекс підгрупи H в групі G,

p – просте число,

$\mathbb{C}_{p^\infty}$ – квазіциклічна p-група,

$\mathbb{C}_{p^n}$ – циклічна p-група порядку p^n $(n \in \mathbb{N})$,

$\cong$ – символ ізоморфізму груп,

$\times$ – символ прямого добутку,

$\rtimes$ – символ напівпрямого добутку,

$\square$ – символ, який означає кінець доведення,

$C_G(H)$ – централізатор підгрупи H в групі G,

RG або $R[G]$ – групове кільце групи G над кільцем R,

$Z(G)$ – центр групи G,

$FratG$ – підгрупа Фраттіні групи G,

$radM$ – радикал Джекобсона модуля M,

$\gamma_k G$ – k-тий гіперцентр групи G,

$G^{(n)}$ – n-тий комутант групи G,

$\Omega_k(G) = \left\{x \in G \mid x^{p^k} = 1\right\}$ – k-тий прошарок p-групи G,

$charK$ – характеристика поля K,

$\mathrm{ann}_R(u) = \{r \in R \mid ru = 0\}$ – анулятор елемента u в кільці R,

$\oplus$ – знак прямої суми,

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ – комутатор елементів x та y,

$[A, B]$ – взаємний комутант підгруп A і B в групі G,

$A^G = \langle g^{-1}Ag \mid g \in G\rangle$ – нормальне замикання підгрупи A в групі G,

$\tau(G)$ – множина всіх елементів скінченного порядку групи G,

$exp(G)$ – експонента групи G,

R° – приєднана група асоціативного кільця R,

A° – приєднана група брейса A,

A^{+} – адитивна група брейса A,

$b^{(-1)}$ – елемент, обернений до елемента $b \in A$ в приєднаній групі A°,

$\operatorname{ann} A$, $\operatorname{ann}_l A$ або $\operatorname{ann}_r A$ – двобічний, лівий чи правий анулятори брейса A,

$C_A(a)$ – централізатор елемента a в A,

$G(R)$ – асоційована група асоціативного кільця R,

$H(L,T)$ – група, асоційована з підмодулем L деякого модуля над брейсом A і підгрупою T із A°,

$H(A)$ – асоційована група брейса A.

ВСТУП

Актуальність теми. Починаючи з робіт Р. Дедекінда [54] про скінченні групи, всі підгрупи яких нормальні, Г. Міллера і Х. Морено [76] про скінченні групи, всі власні підгрупи яких абелеві, О.Ю. Шмідта [33] про скінченні групи, всі власні підгрупи яких нільпотентні, ведуться дослідження груп із системами підгруп, які мають важливі природні властивості. На цьому шляху, прокладеному від скінченних груп до нескінченних, виділено і охарактеризовано багато важливих класів груп, започатковано нові важливі поняття, що суттєво вплинули на подальші напрямки досліджень в теорії груп.

Систематичне вивчення нескінченних груп з умовами скінченності, зініційоване С.М. Черніковим і підсумоване в монографії [27], інтенсивно проводилось ним та його учнями, починаючи з 50-тих років минулого століття.

Цією тематикою, яка виявилась перспективною і плідною, зацікавилось багато різних дослідників із різних країн; вони опублікували результати своїх пошуків у значному числі праць, впроваджуючи при цьому в математику нові фундаментальні поняття і змінюючи погляди на предмет і методи досліджень.

Один із підходів полягає у вивчені груп з "малою" (або "великою" у певному сенсі) системою підгруп, що мають (або не мають) деяку властивість χ. Так, С.М. Черніков започаткував дослідження нескінченних груп з умовами мінімальності та відповідно максимальності для системи не χ-підгруп (тобто системи всіх підгруп групи, які не мають властивості χ), серед яких варто нагадати про дослідження С.М. Чернікова [24] груп з умовою мінімальності для неабелевих підгруп, дослідження Д.І. Зайцева і Л.А. Курдаченка [11] груп з умовою максимальності для неабелевих підгруп. За цей час вивчалися групи з різними умовами мінімальності чи максимальності для різних систем підгруп; серед яких вкажемо на публікації М.Р. Діксона та Л.А. Курдаченко [57], [58], С. Фрачіозі, Ф. де Джованні і Я.П. Сисака [60], Х. Отала та Х. Пени [82], М.М. Семка [77], В.С. Чаріна [19], М.С. Чернікова [20], [21], [22], О.Д. Артемовича [3], [6], [39] та інших. Подібні дослідження груп з умовами мінімальності та відповідно максимальності для певних систем узагальнено нільпотентних підгруп проведено в даній дисертаційній роботі.

До груп з "малою" системою не χ-підгруп відносяться мінімальні не χ-групи, тобто групи, які не є χ-групами в той час, як всі їхні власні підгрупи є χ-групами. Перший такий приклад (а саме, нескінченної мінімальної ненільпотентної групи із субнормальними власними підгрупами) побудували Г. Хайнекен та І. Мохамед [65] в 1968 році (в їх честь такі групи названо групами типу Хайнекена-Мохамеда). Такі групи виявились нерозкладними (тобто групами, в яких будь-які дві власні підгрупи знову породжуть власну підгрупу). В. Мирес в низці робіт (див. його підсумкову роботу [80]) встановив, що групи із субнормальними підгрупами завжди розв'язні. За пройдений період опубліковано біля двох десятків робіт про групи типу Хайнекена-Мохамеда, але вони все ще залишаються недослідженими.

Систематичне вивчення мінімальних не χ-груп започаткував В. Беляев, почавши досліджувати мінімальні не FC-групи і мінімальні не BFC-групи [7], [8]. Пізніше він та, незалежно, Б. Бруно вивчали мінімальні не майже абелеві групи [9], [46], а Б. Бруно та Р. Філліпс [47], [48], [49], [51] – мінімальні не майже нільпотентні групи. Різними авторами (див., наприклад, [64], [83] та інші) вивчались також мінімальні не CC-групи. М. Ксу [99] розглядав групи, всі власні підгрупи яких берові, та групи [100], всі власні підгрупи яких є FN-групами (тобто групами, що є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп), а О.Д. Артемович [2] вивчав властивості мінімальних не майже гіперцентральних груп. Із результатів Ф. Наполітано, Е. Пегораро [78] та Х. Отала, Х. Пени [81] випливає, що якщо χ – це властивість "бути розширенням нільпотентної групи за допомогою черніковської групи", то локально ступінчатих мінімальних не χ-груп не існує. В даній дисертації встановлено, що якщо χ – це властивість "бути розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи", то існує недосконала мінімальна не χ-група і вона є групою типу Хайнекена-Мохамеда.

Важливим напрямком застосування теорії груп – це дослідження груп одиниць (та груп квазірегулярних елементів) кілець. Алгебраїчні одиниці вперше зустрічаються у Ф. Гаусса. Першим важливим результатом про групи одиниць, напевно, є теорема Діріхле про одиниці кільця цілих алгебраїчних чисел. Початкові результати в цьому напрямку описано в монографії [31]. Квазірегулярні елементи ввів С. Перліс з метою характеризації радикала Джекобсона асоціативного кільця. Якщо асоціативне кільце має одиницю, то його група одиниць і приєднана група (тобто група, яка складається із елементів, оборотних стосовно операції кругового множення) ізоморфні. Радикальні кільця вивчалися в роботах Б. Амберга та О. Дікеншіда [35], Дж. Воттерса, Я.П. Сисака [18], Ю.М. Рябухіна та багатьох інших. Я.П. Сисак побудував асоційовану групу $G(R)$ радикального кільця R [18], а О.Д. Артемович розширив цю конструкцію [37] і розглядав групу $H(I,T)$, асоційовану з підмодулем I модуля над довільним асоціативним кільцем R та підгрупою T приєднаної групи R° цього кільця. Ю.Б. Іщук [67] досліджував властивості асоційованої групи $G(R)$ для асоціативного (можливо, без одиниці) кільця R. В. Румп [92] зовсім недавно ввів в розгляд поняття брейса, який, як виявилося, насичений різними підгрупами. Брейс є природним узагальненням радикального кільця. Зокрема, брейс є асоціативним (стосовно операції множення) тоді і тільки тоді, коли він є радикальним кільцем. В дисертації вводиться група $H(L,T)$, асоційована з підмодулем L модуля, який розглядається над довільним брейсом A, та підгрупою T приєднаної групи A°. Зокрема, розглядається група $H(A)$, асоційована з брейсом A, і досліджуються деякі її властивості, пов'язані з нільпотентністю.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, які проводяться в галузі математики у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Матеріал дисертації – складова частина досліджень із держбюджетної теми тем № 0104 U 002129, яка виконувалась на кафедрі алгебри і логіки.

Мета і завдання дослідження. *Мета дисертації* – дослідження груп, насичених підгрупами, близькими до нільпотентних і їх узагальнень.

Об'єкт дослідження – групи з умовами мінімальності (відповідно максимальності) для певних систем підгруп, близькими до нільпотентних, а також груп, пов'язаних з брейсами.

Предмет дослідження – особливості будови груп, які задовольняють певні умови скінченності, а також дослідження груп, асоційованих з брейсами.

Задачі дослідження:

- охарактеризувати групи із певними умовами мінімальності для систем підгруп, які не є узагальнено нільпотентними;
- дослітити періодичні групи із певними умовами максимальності для систем підгруп, які не є узагальнено нільпотентними;

- вивчити певні зв'язки груп із брейсами.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач використовуються методи теорії груп та теорії кілець і модулів.

Наукова новизна отриманих результатів. Усі наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, нові і є такими:

- доведено, що недосконала локально ступінчата група, всі власні нормальні підгрупи якої є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, сама є такою;
- охарактеризовано групи без неодиничних досконалих секцій з умовою мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп;
- встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп в той час, як кожна власна їхня підгрупа є такою, і в недосконалому випадку доведено, що така група є групою типу Хайнекена-Мохамеда;
- встановлено, що в локально нільпотентній групі з умовою мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною (відповідно мінімальною негіперцентральною) групою, субнормальна в групі;
- охарактеризовано періодичні розв'язні групи з умовою максимальності для підгруп, які не є майже абелевими;

- побудовано групу, асоційовану з брейсом, і досліджено деякі її властивості.

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичний характер і можуть бути використані у подальших дослідженнях в теорії груп.

Особистий внесок здобувача. Усі основні результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У спільних статтях (див. [16], [102], [104], [107], [108]) співавтору, який є науковим керівником, належить постановка задачі, обговорення результатів та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації апробовано на таких конференціях:

1. 5-та міжнародна алгебраїчна конференція (2005, Львів);
2. A conference in Honor of Adalbert Bovdi's 70^{th} Birthday (2005, Debrecen, Hungary);
3. 6-та міжнародна алгебраїчна конференція (2007, Кам'янець-Подільський);
4. 2-ма міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми механіки та математики" (2008, Львів);
5. 7-ма міжнародна алгебраїчніа конференція (2009, Харків);
6. 8-ма міжнародна алгебраїчніа конференція (2011, Луганськ);

7. на львівському міському алгебраїчному семінарі під керівництвом професора М.Я. Комарницького (2007, 2012, Львів).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 11 працях [14–16] та [101–108] (6 без співавторів), з яких 6 (2 без співавторів) опубліковано у виданнях, включених до переліку фахових видань.

Структура та об'єм дисертації. Дисертація складається із переліку умовних позначень, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 108 найменувань. Загальний обсяг дисертації — 140 сторінок, обсяг списку використаних джерел — 15 сторінок.

Авторка висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, професору Артемовичу Оресту Дем'яновичу, за постійну увагу та підтримку в роботі.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ І ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

В цьому розділі наведено огляд літератури та результатів досліджень за тематикою дисертаційної роботи, а також короткий огляд результатів, отриманих в дисертації.

1.1. Огляд літератури

Основні означення, які використовуються в дисертаційній роботі, можна знайти в книгах з теорії груп [12], [27], [72], [30], [89], [90], [73], [91] і з теорії кілець [28], [29], [85]. Для зручності нижче в цьому підрозділі наведемо основні поняття і факти, які безпосередньо стосуються проблематики, розглядуваної в дисертації, а також дамо огляд найближчих до нашої тематики наукових досліджень.

1. Нехай нижче G – група (стосовно операції " $\cdot$ "). Нагадаємо, що *класом* груп $\mathfrak{X}$ називається сукупність груп, яка містить одиничну (тривіальну) групу, і з умови $G \in \mathfrak{X}$ випливає, що $\mathfrak{X}$ містить кожну групу, яка ізоморфна G.

Часто пишуть $G \in \mathfrak{X}$ і кажуть, що G належить до класу $\mathfrak{X}$ (рівносильно, G – $\mathfrak{X}$-група або G має теоретико-групову властивість $\mathfrak{X}$).

Підмножина

$$Z(G) = \{z \in G | g \cdot z = z \cdot g \quad \text{для всіх елементів } g \in G\}$$

називається *центром* групи G. Як відомо, $Z(G)$ – нормальна підгрупа в G.

Ланцюг підгруп

$$Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \cdots \leq Z_\alpha(G) \leq \cdots$$

називається верхньою центральною системою групи G, якщо:

i) $Z_0(G) = \langle 1 \rangle$ – одинична підгрупа;

ii) $Z_1(G) = Z(G)$ – центр групи G;

iii)

$$Z_\alpha(G)/Z_{\alpha-1}(G) = Z(G/Z_{\alpha-1}(G)),$$

якщо ординал α не граничний;

$$Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta(G),$$

якщо ординал α граничний.

Якщо знайдеться таке натуральне число n, що $G = Z_n(G)$, то група G називається *нільпотентною*. Найменше натуральне число n з такою властивістю називається *ступенем* (або *класом*) нільпотентності групи G. Ясно, що абелева група є нільпотентною класу 1. Якщо ж $G = Z_\gamma(G)$ для деякого ординала γ, то група G називається *гіперцентральною* (або скорочено ZA-групою). Із означення випливає, що кожна нільпотентна група є гіперцентральною (але навпаки це не завжди так).

Наприклад, мультиплікативна група матриць

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

нільпотентна класу нільпотентності 2, оскільки

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Якщо $x, y \in G$, то елемент $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ називається *комутатором* елементів x та y, а підгрупа

$$[G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle,$$

яка породжена всіма комутаторами $[x, y]$, називається *комутантом* групи G. Часто $[G, G]$ позначають скорочено через G'. Якщо $n \in \mathbb{N}$, то послідовні комутанти групи G визначають так:

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= G, \\ G^{(1)} &= G', \\ G^{(2)} &= [G', G'], \\ &\vdots \\ G^{(n)} &= \left[G^{(n-1)}, G^{(n-1)}\right] \ \text{ -- } n\text{-тий комутант групи } G. \end{aligned}$$

Будемо вживати таких скорочених позначень:

$$G'' = G^{(2)}, G''' = G^{(3)}.$$

Покладаючи:

i) $\gamma_1 G = G$,

ii) $\gamma_2 G = G'$,

iii) $\gamma_\alpha G = [\gamma_{\alpha-1} G, G]$, якщо ординал α неграничний,

iv)

$$\gamma_\alpha G = \bigcap_{\beta<\alpha} \gamma_\beta G,$$

якщо ординал α граничний, отримаємо незростаючий ланцюг підгруп

$$G = \gamma_1 G \geq \gamma_2 G \geq \cdots \geq \gamma_\alpha G \geq \cdots ,$$

який називається *нижньою центральною системою* групи G. Добре відомо, що $Z_\alpha(G), G^{(n)}, \gamma_\alpha G$ – нормальні підгрупи в G.

Якщо група G співпадає з своїм комутантом G', то G називається *досконалою*; якщо ж – ні, то кажуть, що G *недосконала.*

Нехай $\mathfrak{S}$ – теоретико-групова властивість. Кажуть, що G – *майже* $\mathfrak{S}$*-група*, якщо G містить таку підгрупу H скінченного індекса, що H має властивість $\mathfrak{S}$. Наприклад, якщо $\mathfrak{S} = \mathcal{A}$ – клас абелевих груп, то майже $\mathcal{A}$-група називається *майже абелевою* (або AF-групою); якщо ж $\mathfrak{S} = \mathcal{N}$ – клас нільпотентних груп, то майже $\mathcal{N}$-група називається *майже нільпотетною* (або NF-групою).

Ланцюг підгруп

$$G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n \leq \cdots \tag{1.1.1}$$

і відповідно

$$G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n \geq \cdots \tag{1.1.2}$$

називається *субнормальним*, якщо G_n – нормальна підгрупа в G_{n+1} (і відповідно G_{n+1} – нормальна підгрупа в G_n) для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Якщо $G_i \neq G_{i+1}$ для кожного $i \in \mathbb{N}_0$, то ланцюг (1.1.1) називається строго зростаючим і записується у вигляді

$$G_0 < G_1 < \cdots < G_n < \cdots ;$$

подібно, якщо в (1.1.2) $G_i \neq G_{i+1}$ для кожного $i \in \mathbb{N}_0$, то цей ланцюг називається строго спадним і записується у вигляді

$$G_0 > G_1 > \cdots > G_n > \cdots .$$

Підгрупа H групи G називається *субнормальною* (позначається $H \lhd \lhd G$), якщо існує такий субнормальний ряд (1.1.1), що $H = G_0$ та $G = G_n$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Найменше натуральне число n із такою властивістю називається *глибиною* (або дефектом) субнормальності підгрупи H. Ясно, що кожна нормальна підгрупа в групі субнормальна глибини 1. Як відомо (див. теорему 16.2.2 із [12]), в нільпотентній групі кожна підгрупа субнормальна.

Фактор-група

$$G_{i+1}/G_i$$

називається *фактором* ряду (1.1.1), а фактор-група

$$G_i/G_{i+1}$$

– *фактором* ряду (1.1.2) для $i \in \mathbb{N}_0$. Нагадаємо також, якщо існує субнормальний ряд (1.1.1) і натуральне число $n \in \mathbb{N}$ такі, що $G_0 = \langle 1 \rangle$ – одинична підгрупа, $G_n = G$ і всі фактори ряду

(1.1.1) є абелевими, то група G називається *розв'язною* (найменше з можливих n із такою властивістю називається *ступенем розв'язності* групи G). Кожна абелева група є розв'язною ступеня 1.

Якщо H – яка-небудь підгрупа із G, K – нормальна підгрупа в H, то фактор-група H/K називається *секцією* групи G.

2. Нехай p – просте число, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\mathbb{C}_{p^n} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^{p^n} = 1 \right\}$$

– група, яка складається із комплексних коренів степеня p^n із одиниці 1. Якщо

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{p^n} + i\sin\frac{2\pi}{p^n},$$

то $\mathbb{C}_{p^n} = \langle \varepsilon_1 \rangle$, тобто група $\mathbb{C}_{p^n}$ циклічна і породжена елементом ε_1. Оскільки

$$\mathbb{C}_p \leq \mathbb{C}_{p^2} \leq \mathbb{C}_{p^3} \leq \cdots \leq \mathbb{C}_{p^n} \leq \cdots ,$$

то їх об'єднання

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}_{p^n}$$

– група, яка називається *квазіциклічною p-групою* (і позначається через $\mathbb{C}_{p^\infty}$). Квазіциклічна група – це квазіциклічна p-група для певного простого числа p.

Кажуть, що група G – *розширення групи A за допомогою групи B*, якщо виконуються такі дві умови:

1) A – нормальна підгрупа в G;

2) фактор-група G/A ізоморфна групі B.

Група G називається *черніковською*, якщо вона є скіченним розширенням прямого добутку скінченного числа квазіциклічних груп. Інакше кажучи, G – черніковська група, якщо вона має таку нормальну підгрупу

$$A \cong \mathbb{C}_{p_1^\infty} \times \mathbb{C}_{p_2^\infty} \times \cdots \times \mathbb{C}_{p_n^\infty}$$

(тут $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – прості числа, які не обов'язково є різними), що фактор-група G/A скінченна.

Група G називається

- *локально нільпотентною*, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа нільпотентна;
- *локально ступінчатою*, якщо кожна неодинична скінченно породжена підгрупа із G містить власну підгрупу скінченного індекса.

Клас локально ступінчатих груп досить широкий; він містить, наприклад, локально нільпотентні групи і локально розв'язні (зокрема, розв'язні) групи.

Приклад 1.1. Нехай $G = A \rtimes \langle t \rangle$ – напівпрямий добуток квазіциклічної p-групи A $(p > 2)$ і циклічної групи $\langle t \rangle$, порядок якої $|t| = \infty$ нескінченний, причому

$$t^{-1}at = a^{1+p}$$

для будь-якого $a \in A$. Тоді група G має такі властивості:

i) G містить власну несубнормальну підгрупу (тому G не є нільпотентною);

ii) G не є черніковською;

iii) G – розширення абелевої групи A за допомогою абелевої групи $\langle t\rangle$, а тому G – розв'язна група ступеня 2.

Приклад 1.2. Нехай

$$G = A \rtimes \langle t\rangle$$

– напівпрямий добуток квазіциклічної 2-групи A і циклічної групи $\langle t\rangle$ порядку 2, причому

$$t^{-1}at = a^{-1}$$

для кожного елемента $a \in A$. Тоді G має властивості:

i) G – черніковська 2-група;

ii) G є локально нільпотентною, але не є нільпотентною;

iii) G – неабелева група, яка є AF-групою (а тому і NF-групою);

iv) підгрупа $\langle t\rangle$ не є субнормальною в G;

v) кожна підгрупа із A субнормальна в групі G.

3. Група G називається *розкладною*, якщо знайдуться такі дві власні підгрупи $A, B < G$, що група G породжується цими підгрупами, тобто

$$G = \langle A, B\rangle.$$

Якщо таких підгруп не існує, то група G називається *нерозкладною*. Групи G із прикладів 2.1 та 2.1 є розкладними. Як зауважено в [1], абелева група G нерозкладна тоді і тільки тоді, коли $G \cong \mathbb{C}_{p^n}$ або $G \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ для певного простого числа p.

Група G називається *мінімальною не $\mathfrak{X}$-групою*, де $\mathfrak{X}$ – деяка теоретико-групова властивість, якщо кожна власна підгрупа із G є $\mathfrak{X}$-групою в той час, як сама G не є $\mathfrak{X}$-групою. Наприклад, якщо $\mathfrak{X} = N$ – клас нільпотентних груп, то мінімальні не N-групи прийнято називати *мінімальними ненільпотентними групами*. Скінченні мінімальні ненільпотентні групи охарактеризував Л. Редеї [87]. Мінімальні ненільпотентні групи є скінченно породженими або локально скінченними. Приклади простих скінченно породжених мінімальних ненільпотентних груп можна знайти в монографії О.Ю. Ольшанського [13]. М. Ньюмен і Дж. Вайголд [79] ненільпотентну локально нільпотентну групу, всі власні підгрупи якої є нільпотентними, називають AN-групою. Ними встановлено, що кожна розв'язна AN-група G має локально циклічну фактор-групу G/G' і є p-групою для деякого простого числа p. Вони також охарактеризували AN-групи, які мають максимальну підгрупу. AN-групи, які не містять жодної максимальної підгрупи, зліченні. Перші приклади таких груп знайдено Г. Хайнекеном і І. Мохамедом (див. [65],

[66]), а саме в [65] ними побудовано групу G із властивостями:

I) комутант G' – абелева група експоненти p;

II) кожна підгрупа із G є нільпотентною і субнормальною;

III) центр $Z(G) = \langle 1 \rangle$ одиничний.

Пізніше на їхню честь ненільпотентні групи, всі власні підгрупи яких є нільпотентними і субнормальними, названо *групами типу Хайнекена-Мохамеда.* В [66] шляхом побудови встановлено, що існує незліченна родина попарно неізоморфних груп типу Хайнекена-Мохамеда.

Пізніше низки груп типу Хайнекена-Мохамеда побудовано також Дж. Мельдрумом [74], Б. Хартлі [62], [32], Б. Бруно і Р. Філліпсом [50] та Ф. Менегаццо [75]. Детальніший огляд досліджень мінімальних ненільпотентних груп можна знайти в монографіях Дж. Леннокса і Стоунхювера [72], Дж. Леннокса і Д. Робінсона [73] та оглядовій статті О.Д. Артемовича і Л.А. Курдаченка [4].

Х. Сміт [95] довів, що локально нільпотентна група без скруту, всі власні підгрупи якої нільпотентні, сама є нільпотентною. В. Мирес в низці робіт (див. його підсумкову роботу [80]) детально досліджував групи із субнормальними власними підгрупами. Він встановив, що такі групи розв'язні. Як наслідок, групи типу Хайнекена-Мохамеда розв'язні. Опираючись на сказане і теорему 3.1 із праці [95] маємо

Твердження 1.1. *Нехай G – ненільпотентна група, яка не* *має жодної максимальної підгрупи. Якщо всі її власні підгрупи нільпотентні, то вона має такі властивості:*

(i) G *– зліченна p-група для деякого простого числа p і фактор-група $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$;*

(ii) *кожна підгрупа субнормальна в G;*

(iii) $(G')^p \neq G'$ *і кожен гіперцентральний гомоморфний образ групи G абелевий;*

(iv) *централізатор $C_G(G')$ абелевий;*

(v) *комутант G' недоповнюваний в групі G (тобто із рівності $G'H = G$ для підгрупи $H \leq G$ випливає, що $H = G$);*

(vi) G *не має власних підгруп скінченного індексу.*

Кажуть, що група G *має власну факторизацію*, якщо знайдуться такі дві власні підгрупи $A, B < C$, що

$$G = AB.$$

Виявляється, що групи типу Хайнекена-Мохамеда не мають власної факторизації. Це, зокрема, випливає із теореми 1.1 [36], яку подамо як

Твердження 1.2. *Нехай G – нескінченна недосконала неабелева група. Тоді рівносильні такі властивості:*

(1) G' *– нерозкладна група;*

(2) G *не має власної факторизації;*

(3) *G – зліченна група з недоповнювальним комутантом G' і фактор-група $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ для деякого простого числа p.*

За тривалий час пошуків знайдено і інші мінімальні не-$\mathfrak{X}$-групи. Група G називається FA-групою, якщо її комутант G' скінченний (в праці [7] такі групи названо *квазіабелевими*). В.В. Беляєв та М.Ф. Сесекін (див. [7] і [8]) описали мінімальні не FA-групи, а саме вони встановили таке важливе

Твердження 1.3 ([7], теорема)**.** *Недосконала група G – мінімальна не FA-група тоді і тільки тоді, коли вона є групою одного з таких типів:*

(α_1) *$G = \langle b, a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots \rangle$, де $b^{p^n} = 1$, $[a_i, a_j] = 1$, $[b, a_0] = 1$, $[b, a_i] = a_{i-1}$ $(i \neq 0)$, $a_0^p = 1$;*

(α_2) *$G = \langle b, a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots \rangle$, де $b^{p^n} = a_0$, $[a_i, a_j] = 1$, $[b, a_i] = a_{i-1}$ $(i \neq 0)$, $a_0^p = 1$;*

(α_3) *$G = (A_1 \times \ldots \times A_v) \rtimes \langle b \rangle$, де $A_i \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$, $b^{q^n} = 1$ (p і q – різні прості числа); якщо $a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{ij}, \ldots$ – твірні елементи підгрупи A_i, то*

$$a_{ij}^p = a_{i,j-1}, a_{i0}^p = 1$$

та

$$b^{-1} a_{ij} b = a_{i+1,j} \quad \text{для} \quad i \neq j,$$
$$b^{-1} a_{vj} b = a_{1j}^{c_1} \cdots a_{vj}^{c_v},$$

де $c_1, \ldots, c_v$ – цілі p-адичні числа, які є коефіцієнтами незвідного многочлена $x^v - c_1 x^{v-1} - \cdots - c_{v-1} x - c_v$, що ділить многочлен $\frac{x^q - 1}{x - 1}$ над кільцем цілих p-адичних чисел.

Цією проблематикою займались також Б. Бруно і Р. Філліпс [45]. В. В. Беляєв [9] і незалежно Б. Бруно [46], [48] досліджували мінімальні не майже абелеві групи. Вони встановили таке

Твердження 1.4. *Якщо G – локально ступінчата періодична мінімальна не не AF-група, то G – нерозкладна метабелева група або G – група Чаріна.*

Нагадаємо одну конструкцію, яка називається *групою Чаріна.* Нехай p і q – різні прості числа, $\mathbb{F}_q$ – скінченне поле із q елементів. Покладемо

$$F_i = \mathbb{F}_q(\varepsilon_i)$$

та

$$F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i,$$

де ε_i – примітивний корінь степеня p^i із одиниці 1 $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Якщо A – адитивна група поля F, а B – мультиплікативна підгрупа, яка складається із всіх коренів степенів p^i із одиниці 1, де $i = 0, 1, 2, \ldots$, то правило

$$b^{-1}ab = b^{p^m} \cdot a,$$

де $a \in A$, $b \in B$, $m \in \mathbb{N}_0$, а $b^{p^m} \cdot a$ – добуток елементів b^{p^m} та a в полі F, визначає дію групи B на групі A. Група

$$G = A \rtimes B$$

називається *групою Чаріна* (див. [9]). Для $m = 0$ така група побудована в роботі В.С. Чаріна [19].

Нерозкладні метабелеві групи вивчались в роботі О.Д. Артемовича [1].

Пізніше Б. Бруно (див. [46] і [49]) досліджувала групи, всі власні підгрупи яких є майже нільпотентними. Х. Отал, Х. Пена та Б. Хартлі [83], [64], [84] займалися мінімальними не CC-групами; вони встановили, що такі групи є досконалими.

В 1995 році Б. Бруно і Р. Філліпс опублікували працю [51], в якій встановили, що недосконала мінімальна не майже абелева (відповідно не майже нільпотентна) група є періодичною, і отримали таке

Твердження 1.5 ([51], наслідок 2.7)**.** *Нехай G – недосконала група, яка не є локально нільпотентною. Тоді G – мінімальна не майже нільпотентна група в тому і тільки тому випадку, коли $G = V \rtimes H$ – напівпрямий добуток квазіциклічної p-групи H і спеціальної q-групи, де H діє тривіально на V' та V/V' – мінімальна нормальна підгрупа в G/V' (тут p і q – різні прості числа).*

Зазначимо також лему 2.3 із роботи [51], яка має самостійне значення, у вигляді такого

Твердження 1.6. *Нехай G – періодична абелева група, а M – ненульовий $\mathbb{Z}G$-модуль, який є групою без скруту. Тоді для будь-якої скінченної множини простих чисел π знайдеться такий $\mathbb{Z}G$-підмодуль N із M, що фактор-група M/N – періодична група, яка містить елемент порядку p для кожного $p \in \pi$.*

М. Ксу [99] досліджував групи, всі власні підгрупи яких є групами Бера, і групи, всі власні підгрупи яких розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних [100]. Група, яка є розширенням скінченної групи за допомогою нільпотентної (відповідно абелевої) групи, прийнято скорочено називати *FN-групою* (відповідно *FA-групою*). Зрозуміло, що група G – FN-група тоді і тільки тоді, коли $\gamma_k(G)$ скінченний для деякого $k \in \mathbb{N}$. Із результатів М. Ксу отримуємо таке

Твердження 1.7. *Нехай G – нескінченна група, яка не є скінченно породженою. Тоді – мінімальна не FN-група в тому і тільки тому випадку, коли G – група одного із таких типів:*

(α) *G – недосконала мінімальна не FA-група* (див. твердження 1.3)*;*

(β) *G – недосконала мінімальна ненільпотентна група з субнормальними власними підгрупами;*

(γ) *G – досконала локально нільпотентна мінімальна ненільпотентна група.*

1.2. Низка необхіжних результатів

Для зручності читача наведемо означення і результати, які неодноразово будуть необхідними надалі.

Твердження 1.8 ([81], твердження 2.2)**.** *Періодична $A\check{C}$-група G має таку абелеву характеристичну підгрупу A, що фактор-група G/A черніковська.*

Твердження 1.9 ([63], лема 4.7). *Нехай G – група, яка містить таку нільпотентну нормальну підгрупу A, що G/A черніковська. Припустимо, що G породжується родиною нільпотентних нормальних підгруп обмеженого класу. Тоді:*

(i) G нільпотентна;

(ii) якщо A абелева і G періодична, то G містить характеристичну абелеву підгрупу скінченного індексу.

Твердження 1.10 ([90], стор. 156). *Локально надрозв'язна група задовольняє умову $Min - n$ тоді і тільки тоді, коли вона гіперциклічна черніковська група. Тобто для локально надрозв'язної групи умови Min та $Min - n$ співпадають.*

Твердження 1.11 ([91], теорема 12.1.5). *Якщо M – максимальна підгрупа локально нільпотентної групи G, то M нормальна в G. Еквівалентно $G' \leq FratG$.*

Твердження 1.12 ([29], твердження і означення 19.24). *Кільце R називається регулярним (в сенсі фон Неймана), якщо виконуються такі рівносильні умови:*

(a) кожен циклічний правий R-модуль плоский;

(b) кожен правий R-модуль плоский;

(c) якщо $x \in R$, то знайдеться такий елемент $a \in R$, що $xax = x$ (тоді xa – ідемпотент, який породжує xR);

(d) *кожен головний правий ідеал породжується ідемпотентом;*

(e) *кожен скінченно породжений правий ідеал породжується ідемпотентом;*

(i') *ліві аналоги властивості* (i)*, де* $i = a, b, c, d, e$.

Твердження 1.13 ([85], частина 1, § 3, теорема 1.5)**.** *Нехай* K *– поле,* G *– група. Групове кільце* $K[G]$ *регулярне (в сенсі фон Неймана) тоді і тільки тоді, коли* G *– локальна скінченна група, яка не містить жодного елемента порядка* p*, якщо характеристика* $char(K) = p$.

Твердження 1.14 ([29], наслідок 19.53)**.** *Комутативне кільце* R *регулярне (в сенсі фон Неймана) тоді і тільки тоді, коли воно є* V*-кільцем.*

Ненульовий модуль, який має тільки два підмодулі, називається *простим*. Характеризацію правих V-кілець дає таке

Твердження 1.15 ([28], теорема 7.32A)**.** *Кільце* R *називається правим* V*-кільцем, якщо виконуються такі еквівалентні умови:*

(a) *кожен простий правий* R*-модуль ін'єктивний;*

(b) *кожен правий ідеал є перетином максимальних правих ідеалів;*

(c) *радикал Джекобсона* $radM = (0)$ *нульовий для кожного правого* R*-модуля* M.

Твердження 1.16 ([28], твердження 3.56). *Об'єкт в категорії правих* R*-модулів ін'єктивний тоді і тільки тоді, коли кожен мономорфізм* $E \to F$ *розщеплюється в категорії правих* R*-модулів.*

Твердження 1.17 ([9], лема 1). *Нехай* $G = A \rtimes B$, *де* B *– квазіциклічна* q*-група, а* A *– нескінченна елементарна абелева* p*-група, причому* A *– мінімальна нормальна підгрупа в* G. *Тоді* G *– група Чаріна.*

Абелева (адитивна) група D така, що рівняння

$$nx = a$$

має розв'язок в D для будь-яких $a \in D$ та $n \in \mathbb{N}$, називається *подільною.* Абелева група називається *редукованою*, якщо вона не має ненульових подільних підгруп.

Підгрупа B групи A називається *p-базовою*, якщо виконуються такі три умови:

1) B – пряма сума циклічних p-груп і нескінченних циклічних груп;

2) B – p-сервантна підгрупа в A;

3) фактор-група A/B – p-подільна група.

Твердження 1.18 ([30], теорема 21.3)**.** *Кожна абелева група* A *– пряма сума подільної групи* D *і редукованої групи* C*, тобто*

$$A = D \oplus C.$$

Підгрупа D *групи* A *визначається однозначно, а підгрупа* C *– однозначно з точністю до ізоморфізму.*

Твердження 1.19 ([30], твердження 27.1)**.** *Припустимо, що підгрупа* B *групи* A *– пряма сума циклічних груп одного і того ж порядку* p^k*. Тоді еквівалентні такі умови:*

(a) B *– сервантна підгрупа в* A*;*

(b) $B \bigcap p^k A = (0)$*;*

(c) B *– прямий доданок групи* A*.*

Твердження 1.20 ([1], лема 2)**.** (a) *Скінченна група нерозкладна тоді і тільки тоді, коли вона циклічна* p*-група.*

(b) *Нескінченна нерозкладна група не містить підгруп скінченного індексу.*

Твердження 1.21 ([89], теорема 4.12)**.** *Якщо* G *– група із центром* $Z(G)$ *скінченного індексу* n*, то комутант* G' *скінченний і* $(G')^n = \langle 1 \rangle$*.*

Твердження 1.22 ([27], теорема 2.2). *Кожна гіперцентральна квазіповна (а значить, повна) періодична група є абелевою.*

Твердження 1.23 ([89], теорема 3.29). *Нехай A – періодична група автоморфізмів черніковської групи G. Тоді A – черніковська група.*

Твердження 1.24 ([27], наслідок 1.7). *Кожна квазіциклічна підгрупа нільпотентної p-групи міститься в її центрі.*

Твердження 1.25 ([37], лема 1.1). *Якщо $G = F \rtimes H$ – група Фробеніуса з ядром F і доповненням H, то $F = [F, h]$ для кожного неодиничного елемента $h \in H$.*

Нагадаємо, що група G називається *HM^*-групою*, якщо її комутант G' – гіперцентральна група, а фактор-група G/G' – скінченний прямий добуток квазіциклічних p-груп.

Твердження 1.26 ([81], теорема 1). *Нехай $c \geq 1$ – ціле число. Тоді локально ступінчата група G – розширення черніковської групи за допомогою нільпотентної групи класу c в тому і тільки тому випадку, коли кожна власна підгрупа із G є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи класу c.*

Твердження 1.27 ([81], теорема 2). *Періодична локально ступінчата група G – розширення абелевої групи за допомогою черніковської групи тоді і тільки тоді, коли кожна власна* *підгрупа із G є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської групи.*

Твердження 1.28 ([78], теорема A)**.** *Нехай G – локально ступінчата група, в якій всі власні підгрупи є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп. Тоді або G – розширення нільпотентної групи за допомогою черніковської групи, або G – досконала зліченна локально скінченна p-група, в якій всі власні підгрупи є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп.*

Твердження 1.29 ([42], теорема 1.3)**.** *Нехай G – локально нільпотентна p-група, в якій кожна власна підгрупа є розширенням нільпотентної групи за допомогою черніковської групи. Тоді G – розширення нільпотентної групи за допомогою черніковської групи.*

1.3. Основний зміст дисертації

В цьому підрозділі наведемо низку основних результатів дисертаційної роботи.

В розділі 2 вивчаються групи з умовами мінімальності для певних систем підгруп, які не є узагальнено нільпотентними. $A\check{C}$-групою (відповідно $\check{C}A$-групою чи $N\check{C}$-групою) називається група, яка є розширенням абелевої (відповідно черніковської чи нільпотентної) групи за допомогою черніковської (відповідно абелевої чи черніковської) групи.

Наслідок 2.1. *Нехай G – локально ступінчата група. Тоді вірні твердження:*

(1) *якщо G не є $\check{C}A$-групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є $\check{C}A$-групами;*

(2) *якщо G не є $A\check{C}$-групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є $A\check{C}$-групами.*

Теорему 2 із [81] узагальнює таке

Твердження 2.2. *Нехай G – недосконала локально ступінчата група. Тоді:*

(1) *якщо група G періодична і всі власні нормальні підгрупи із G є $A\check{C}$-групами, то G – $A\check{C}$-група;*

(2) *якщо всі власні нормальні підгрупи із G є $N\check{C}$-групами, то G – $N\check{C}$-група.*

Нагадаємо, що група, яка є розширенням скінченної групи за допомогою нільпотентної (відповідно абелевої) групи, прийнято скорочено називати FN-групою (відповідно FA-групою). Одним із центральних резултьтатів дисертації є така характеризація груп з умовою $Min - \overline{FN}$.

Теорема 2.1. *Нехай G – група, яка не має неодиничних досконалих секцій. Тоді група G задовольняє умову мінімальності для не FN-підгруп $Min - \overline{FN}$ в тому і тільки тому випадку, коли вона належить до одного із типів:*

(1) *G – FN-група;*

(2) *G – майже нільпотентна група;*

(3) *G має таку нормальну підгрупу A скінченного індексу, що*

$$A = A_0 \cdot A_1 \cdots A_n \ (n \geq 1),$$

де A_i – група з нільпотентним комутантом $A_i' = A' \leq A_0$ і подільною черніковською p_i-групою A_i/A_i' $(i = 1, \ldots, n)$, A_0 – нільпотентна нормальна підгрупа із подільною черніковською фактор-групою A_0/A' (зокрема, A_0/A' одинична) і, крім того, $p_1, \ldots, p_n$ – попарно різні прості числа.

Одним із головних результатів роботи є така

Теорема 2.2. *Нехай G – недосконала група. Тоді G – мінімальна не $\check{C}N$-група в тому і тільки тому випадку, коли G – мінімальна ненільпотентна група із субнормальними власними підгрупами.*

Встановлена також

Теорема 2.3. *Нехай G – локально нільпотентна група. Тоді справджуються такі твердження:*

(i) *якщо G задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною групою, є субнормальною в G;*

(ii) *якщо G задовольняє умову мінімальності для негіперцентральних підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною негіперцентральною групою, є субнормальною в G.*

Грунтуючись на результатах (І. Капланського, Дж. фон Неймана та інших) із теорії кілець і модулів, отримується такі лема та твердження.

Лема 3.2. *Нехай $G = A \rtimes B$ – напівпрямий добуток нормальної абелевої підгрупи A скінченної експоненти p і квазіциклічної q-підгрупи B, де p і q – різні прості числа. Якщо група G задовольняє умову $Max - \overline{AF}$ і всі її власні нормальні підгрупи майже абелеві, то вона майже абелева або*

$$G' = A = A_1 \times \cdots \times A_m$$

– скінченний прямий добуток G-інваріантних підгруп A_i, де $A_i \rtimes B$ – група Чаріна $(n \geq 1; i = 1, \ldots, n)$.

Твердження 3.1. *Нехай G – група без неодиничних досконалих секцій. Якщо G задовольняє $Max - \overline{AF}$ і всі її власні нормальні підгрупи майже абелеві, то G – майже абелева група або належить до одного з типів:*

(1) *G – мінімальна не майже абелева група;*

(2) *$G = G' \rtimes P$, де $P \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$,*

$$G' = Q_1 \times \cdots \times Q_s$$

– p'-підгрупа, яка є прямим добутком своїх силовських p_i-підгруп Q_i експоненти $p_i^{n_i}$, причому

$$\left(\Omega_{j+1}(Q)i) \rtimes P\right) / \Omega_j(Q_i)$$

– група Чаріна $(n_i \in \mathbb{N}; i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, n_i)$;

(3) *$G = A \rtimes P$, де A – мінімальна не майже абелева група, $G' = A \rtimes P'$ та G/P' – група типу (2);*

Групу, яка містить абелеву підгрупу скінченного індексу, прийнято називати майже абелевою (або AF-групою). На основі двох попередніх результатів отримано таку основну (в розділі 3) теорему.

Теорема 3.1. *Нехай G – періодична розв'язна група. Тоді G задовольняє умову $Max - \overline{AF}$ в тому і тільки в тому випадку, коли вона майже абелева група або $G = HF$ – локально майже абелева група, де $H'F$ – майже абелева підгрупа, $|G : H| < \infty$ і H належить до одного із типів:*

(i) *H – мінімальна не майже абелева група;*

(ii) *$H = H' \rtimes P$, де P – квазіциклічна p-група,*

$$H' = Q_1 \times \cdots \times Q_s$$

– p'-група, яка є прямим добутком своїх силовських p_i-підгруп Q_i експоненти $p_i^{n_i}$, причому

$$(\Omega_{j+1}(Q_i) \rtimes P) / \Omega_j(Q_i)$$

– група Чаріна ($n_i \in \mathbb{N}; i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, n_i$);

(iii) *$H = A \rtimes P$, де P – мінімальна не майже абелева група, $H' = A \rtimes P'$ та H/P' – група типу (ii).*

Якщо $(R, +, \cdot)$ – асоціативне кільце, то операція $" \circ "$, визначена за правилом

$$a \circ b = a + b + a \cdot b$$

для будь-яких елементів $a, b \in R$, називається приєднаним множенням. Тоді $(R, \circ)$ – напівгрупа з нейтральним елементом $0 \in R$. Якщо $(R, \circ)$ – група (тоді вона позначається символом R°), то кільце R називається радикальним. Поняття кругової операції в 40-их роках минулого століття ввів С. Перліс з метою характеризації радикала Джекобсона в асоціативному кільці.

В четвертому розділі розглядаються брейси A, введені В. Румпом [92]. Нагадаємо, що непорожна множина A, на якій визначено дві алгебраїчні операції $" + "$ та $" \cdot "$, називається брейсом (=brace), якщо виконуються такі умови:

(i) $A^+ = (A, +)$ – абелева група (з нулем 0);

(ii) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ для будь-яких елементів $a, b, c \in A$;

(iii) A – група стосовно операції приєднаного множення $" \circ "$, визначеної за правилом

$$a \circ b = a + b + a \cdot b$$

для елементів $a, b \in A$.

Брейс є природним узагальненням радикального кільця. Зокрема, брейс є асоціативним (стосовно операції множення $" \cdot "$) тоді і тільки тоді, коли він є радикальним кільцем. Я. П. Сисак [18] у 1982 році побудував групу, асоційовану з радикальним кільцем. Пізніше О.Д. Артемович [37] розширив цю конструкцію на випадок лівого модуля над довільним асоціативним кільцем R. Ю.Б. Іщук [67] досліджував властивості асоційованої групи $G(R)$ для асоціативного (можливо, без одиниці) кільця R. Нижче побудовано групу $H(L, T)$, асоційовану з підмодулем L модуля, який розглядається над довільним брейсом A, та підгрупою T приєднаної групи A°. В наступній лемі для брейса A побудовано асоційовану з ним групу $H(A)$.

Лема 4.1. *Нехай M – модуль над брейсом A. Якщо L – підмодуль із M, а T – підгрупа із A°, то*

$$H(L,T) = E \rtimes T$$

– група стосовно операції, визначеної за правилом (4.1.1), *причому $E = \{(l,0) \mid l \in L\}$ ізоморфна адитивній групі $(L,+)$, а $F = \{(e,t) \mid t \in T\}$ ізоморфна групі T.*

Досліджено зв'язки між асоційованими групами брейса, його підбрейса та фактор-брейса (див. леми 4.2, 4.4 та 4.5).

Нагадаємо, що група $H = E \rtimes F$ називається групою Фробеніуса із ядром E і доповненням F, якщо виконуються дві такі умови:

- $F \bigcap F^g = \langle 1 \rangle$ – одинична група для всіх $g \in H \setminus F$;
- $$E \setminus \langle 1 \rangle = H \setminus \bigcup_{h \in H} F^h.$$

Наступна теорема встановлює необхідну і достатню умову, за якої група $H(L,T)$ є групою Фробеніуса.

Теорема 4.1. *Нехай M – модуль над брейсом A, L – ненульовий підмодуль із M, T – ненульова підгрупа приєднаної групи A°. Тоді*

$$H = H(L,T) = E \rtimes F$$

– група Фробеніуса із ядром E і доповненням F тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

(i) $L = Lh$ для будь-якого ненульового елемента $h \in T$;

(ii) $\mathrm{ann}_T(l) = \{t \in T \mid lt = e\} = \{0\}$ *для кожного ненульового елемента* $l \in L$

Побудовано приклад брейса , асоційована група якого є групою Фробеніуса (приклад 4.1).

Я.П. Сисак [18] встановив, що радикальне кільце R нільпотентне (відповідно гіперцентральне) тоді і тільки тоді, коли його асоційована група $G(R) \cong R^+ \rtimes R^\circ$ нільпотентна (відповідно гіперцентральна). Ю.Б. Іщук досліджував взаємозв'язки між властивостями асоціативного кільця R та його асоційованої групи $G(R)$. В четвертому підрозділі введено в розгляд поняття нільпотентного зліва (відповідно справа) брейса A і досліджено умови періодичності його адитивної A^+ та приєднаної A° груп. Нагадаємо, що $A^{n+1} = A(A^n)$ та $A^{(n+1)} = (A^{(n)})A$ для будь-якого натурального числа n. Брейс A називатимемо нільпотентним справа (відповідно нільпотентним зліва), якщо $A^{(n)} = \{0\}$ (відповідно $A^n = \{0\}$) для певного $n \in \mathbb{N}$.

Деякі зв'язки властивостей адитивної A^+ і приєднаної A° груп нільпотентного брейса A встановлює таке

Твердження 4.1. *Нехай A – брейс, який є нільпотентним справа (відповідно нільпотентним зліва), p – просте число. Тоді мають місце такі властивості:*

(i) A^+ *– p-група тоді і тільки тоді, коли* A° *– p-група;*

(ii) A^+ *– група без скруту тоді і тільки тоді, коли* A° *– група без скруту.*

Вивчено також взаємозв'язок між нільпотентністю брейса A та його асоційованої групи $H(A)$.

Теорема 4.2.

(1) *Якщо A – ненульовий нільпотентний зліва брейс, то справджуються такі властивості:*

  (i) *$H(A)$ – нільпотентна група;*

  (ii) *$\operatorname{ann} A \neq \{0\}$.*

(2) *Якщо A – ненульовий нільпотентний справа брейс, то $H(A)$ – розв'язна група.*

Висновки до розділу 1

Цей розділ допоміжний. У ньому викладено основні поняття і сформульовано результати, що використовуються в дисертації. Також коротко наведено основні результати даної дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 2

ГРУПИ З УМОВОЮ МІНІМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ПІДГРУП, ЯКІ НЕ Є УЗАГАЛЬНЕНО НІЛЬПОТЕНТНИМИ

С.М. Черніков та його учні (див. монографію [27]) в багатьох роботах вивчали групи, "великі" системи підгруп яких мали деяку властивість χ. Природно до цього напрямку віднести роботи з умовами мінімальності для підгруп, які не мають властивості χ. В цьому контексті, С.М. Черніков вивчав групи з умовою мінімальності для неінваріантних підгруп [25] та групи з умовою мінімальності для неабелевих підгруп [26]. Р. Філліпс та Дж. Вілсон [86] досліджували поведінку груп, для яких множина підгруп, що не є локально нільпотентними, задовольняє умову мінімальності. Х. Отал та М. Пена [82] вивчали локально ступінчаті групи з умовою $Min - \chi$, де властивість χ означає відповідно "нормальність", "нормальність і нільпотентність", "нормальність або локальну нільпотентність", "нормальність або нільпотентність класу $\leq c$", "c-гамільтоновість" та "нільпотентність класу $\leq c$".

Подібно для різних властивостей χ групи з умовою $Min- \chi$ досліджували Б. Бруно і Р. Філліпс [45] та М. Діксон, М. Еванс і Х. Сміт [56].

Локально ступінчаті групи з умовою мінімальності для ненадрозв’язних підгруп вивчала М. де Фалько [59], а групи з різними умовами мінімальності для ненільпотентних підгруп

– М. Діксон, М. Еванс та Х. Сміт [55]. О.Д. Артемович [39] досліджував групи з умовою мінімальності для не майже нільпотентних підгруп. Різними авторами вивчалися також групи, що є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських, та групи, що є розширеннями нільпотентних груп за допомогою скінченних груп (див., наприклад, [84], [98]). Досліджувались також групи з іншими умовами мінімальності (див., наприклад, М.М. Семко [77], М.С. Черніков [21], [22] та інші).

2.1. Групи, насичені $A\check{C}$-підгрупами або $\check{C}A$-підгрупами

Нагадаємо, що $A\check{C}$*-групою* (відповідно $\check{C}A$*-групою*) називається група, яка є розширенням абелевої (відповідно черніковської) групи за допомогою черніковської (відповідно абелевої) групи. Зрозуміло, що кожна абелева і кожна черніковська група є одночасно $A\check{C}$-групою і $\check{C}A$-групою. Група G із прикладу 1.1 є $\check{C}A$-групою, але не є $A\check{C}$-групою. Як встановили Х. Отал і Х. Пена [81], мінімальних не $\check{C}A$-груп в класі локально ступінчатих груп не існує. Подібним чином із теореми 2 [81] і теореми C із [78] випливає, що в класі локально ступінчатих груп не існує також мінімальних не $A\check{C}$-груп. Аналогічний результат дістаємо для $N\check{C}$-груп із теореми 2 [78] і теореми 1.3 із [42], тобто локально ступінчата група, всі власні підгрупи якої $N\check{C}$-групи, сама є такою. Нагадаємо, що $N\check{C}$*-група* – це група, яка є розширенням нільпотентної групи за допомогою черніковської групи.

В цьому підрозділі нами досліджуються локально ступінчаті групи з умовою мінімальності для не $A\check{C}$-підгруп $Min - \overline{A\check{C}}$ і умовою мінімальності для не $\check{C}A$-підгруп $Min - \overline{\check{C}A}$. Попередньо встановимо низку допоміжних результатів.

Лема 2.1. *Нехай G – група, H – її підгрупа, а χ – теоретико-групова властивість, яка успадковується підгрупами і образами гомоморфізмів. Якщо G задовольняє умову мінімальності $Min - \overline{\chi}$ для не χ-підгруп, то вірні такі твердження:*

(1) *H задовольняє умову $Min - \overline{\chi}$;*

(2) *якщо H – нормальна підгрупа в G, то фактор-група G/H задовольняє умову $Min - \overline{\chi}$;*

(3) *якщо H – нормальна підгрупа в G і H не є χ-групою, то фактор-група G/H задовольняє умову мінімальності для підгруп Min.*

Доведення. Нехай G – група з умовою $Min - \overline{\chi}$.

(1) Оскільки кожен строго спадний ланцюг не χ-груп із H є одночасно строго спадним ланцюгом не χ-підгруп в G, то він через скінченне число кроків обривається.

(2) Нехай $H \lhd G$ та

$$G_1/H > G_2/H > \cdots > G_n/H > \cdots \qquad (2.1.1)$$

– який-небудь строго спадний ланцюг не χ-підгруп із фактор-групи G/H. Якщо G_i – повний прообраз фактор-групи G_i/H в групі G, то

$$G_1 > G_2 > \cdots > G_n > \cdots$$

– строго спадний ланцюг не χ-підгруп із G, а тому він обривається через скінченне число кроків. Як наслідок, ланцюг (2.1.1) через скінченне число кроків також стабілізується.

(3) Нехай $H \lhd G$ і H не є χ-групою. Від супротивного. Припустимо, що фактор-група G/H не задовольняє умову Min. Тоді існує нескінченний строго спадний ланцюг

$$\overline{G} = G/H = \overline{G}_0 > \overline{G}_1 > \cdots > \overline{G}_n > \cdots$$

підгруп $\overline{G}_i$ в групі $\overline{G}$ $(i \in \mathbb{N}_0)$. Якщо G_i – повний прообраз підгрупи $\overline{G}_i$ в групі G, то ланцюг підгруп

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_n > \cdots$$

є нескінченним і строго спадним, причому кожна його підгрупа не є χ-групою, а це суперечить умові $Min - \overline{\chi}$. Отже, фактор-група G/H задовольняє умову Min. □

Твердження 2.1. *Нехай G – локально ступінчата група. Тоді вірні такі твердження:*

(1) *група G задовольняє умову мінімальності для не $\check{C}A$-підгруп $Min - \overline{\check{C}A}$ в тому і тільки в тому випадку, коли G – $\check{C}A$-група;*

(2) *група G задовольняє умову мінімальності для не $A\check{C}$-підгруп $Min - \overline{A\check{C}}$ в тому і тільки в тому випадку, коли G – $A\check{C}$-група.*

Доведення. ($\Leftarrow$) Очевидно.

($\Rightarrow$) Припустимо, що група G задовольняє умову $Min-\overline{\check{C}A}$ (відповідно $Min-\overline{A\check{C}}$). Одночасно припустимо, що група G не є $\check{C}A$-групою (відповідно не є $A\check{C}$-групою). Тоді G має скінченний строго спадний ланцюг

$$G = G_1 > G_2 > \cdots > G_n$$

підгруп G_i ($i = 1, \ldots, n$), які не є $\check{C}A$-групами (відповідно не є $A\check{C}$-групами). Окрім того, всі власні підгрупи із G_n є $\check{C}A$-групами (відповідно $A\check{C}$-групами). Але з огляду на твердження 1.26 (відповідно твердження 1.27, твердження 1.28 і твердження 1.29) це неможливо. Отримана суперечність показує, що G – $\check{C}A$-група (відповідно $A\check{C}$-група). □

Із цього твердження безпосередньо маємо такий

Наслідок 2.1. *Нехай G – локально ступінчата група. Тоді вірні твердження:*

(1) *якщо G не є $\check{C}A$-групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є $\check{C}A$-групами;*

(2) *якщо G не є $A\check{C}$-групою, то вона має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є $A\check{C}$-групами.*

Теорему 2 із [81] узагальнює таке

Твердження 2.2. *Нехай G – недосконала локально ступінчата група. Тоді справджуються властивості:*

(1) *якщо група G періодична і всі власні нормальні підгрупи із G є $A\check{C}$-групами, то G – $A\check{C}$-група;*

(2) *якщо всі власні нормальні підгрупи із* G *є* $N\check{C}$*-групами, то* G *–* $N\check{C}$*-група.*

Доведення. (1) Нехай G – недосконала періодична локально ступінчата група, всі власні нормальні підгрупи якої є $A\check{C}$-групами. Якщо фактор-група G/G' розкладна, то $G = AB$ – добуток двох своїх власних нормальних підгруп A і B. Позаяк за твердженням 1.8 підгрупа A (відповідно B) містить характеристичну абелеву підгрупу A_1 (відповідно B_1) із черніковською фактор-групою A/A_1 (відповідно B/B_1), то добуток A_1B_1 – нормальна підгрупа в G і фактор-група G/A_1B_1 є черніковською. Оскільки добуток A_1B_1 – нільпотентна $A\check{C}$-група, то знову за твердженням 1.8 вона має таку характеристичну (а значить, нормальну в групі G) підгрупу A_2, що G/A_2 – черніковська група. Тому G – $A\check{C}$-група.

Тепер нехай фактор-група G/G' нерозкладна. Тоді за твердженням 1.20 фактор-група $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^n}$ –циклічна p-група або $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ – квазіциклічна p-група для деякого простого числа p. Знову, застосовуючи твердження 1.8 до $A\check{C}$-підгрупи G', дістаємо, що G – $A\check{C}$-група.

(2) Нехай G – локально ступінчата група, всі власні нормальні підгрупи якої є $N\check{C}$-групами. Якщо фактор-група G/G' нерозкладна, то за твердженням 1.20 вона черніковська.

Припустимо, що G/G' – розкладна група. Тоді G – добуток двох власних нормальних підгруп, кожна із яких є $N\check{C}$-групою. Як наслідок, група G має черніковський гомоморфний образ.

Таким чином, в обох випадках група G має таку нормальну підгрупу S, що G/S – черніковська група. Позаяк S має нормальну нільпотентну підгрупу S_1 із черніковською фактор-групою S/S_1 та за твердженням 1.9 нормальне замикання

$$S_1^G = \langle S_1^g \mid g \in G \rangle$$

– нільпотентна підгрупа в G, то G – $N\check{C}$-група. □

ВИСНОВКИ.

Встановлено, що локально ступінчата група, яка не є розширенням черніковської групи за допомогою абелевої групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих (наслідок 2.1). Подібним способом доведено, що локально ступінчаста група, яка не є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських (наслідок 2.1). Встановлено, що недосконала локально ступінчата група із власними нормальними підгрупами, які є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, сама є такою (твердження 2.2).

2.2. Групи із умовою мінімальності для підгруп, які не є FN-групами

Як зазначалося раніше (див. твердження 1.7), мінімальні не FN-групи охарактеризував М. Ксу [100].

Нагадаємо також, що група G задовольняє умову мінімальності для не FN-підгруп $Min-\overline{FN}$, якщо для будь-якого строго спадного ланцюга

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_n > \cdots \tag{2.2.1}$$

підгруп G_n групи G знайдеться такий індекс $n_0 \in \mathbb{N}_0$, що G_m – FN-група для всіх $m \geq n_0$.

Лема 2.2. *Кожна майже нільпотентна група задовольняє умову $Min - \overline{FN}$.*

Доведення. Нехай G – майже нільпотентна група, а H – її нормальна нільпотентна підгрупа скінченного індекса. Якщо G_n – яка-небудь підгрупа із строго спадного ланцюга (2.2.1), то G_nH/H – одинична група для певного $n \in \mathbb{N}_0$, а тому G_n – FN-група. Це показує, що група G задовольняє умову $Min - \overline{FN}$. □

Лема 2.3. *Нехай G – недосконала група, всі власні нормальні підгрупи якої є FN-групами. Тоді або G – FN-група, або її комутант G' періодичний і фактор-група G/G' нерозкладна.*

Доведення. Якщо фактор-група G/G' розкладна, сама група $G = AB$ – добуток двох своїх власних нормальних підгруп A і B. Так як $\gamma_n(A)$ і $\gamma_m(B)$ – скінченні нормальні підгрупи в G для деяких індексів $n, m \in \mathbb{N}_0$, то фактор-група

$$\overline{G} = G/(\gamma_n(A) \cdot \gamma_m(B)) = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

– добуток двох нормальних нільпотентних підгруп $\overline{A}$ і $\overline{B}$. Тому G – FN-група. З огляду на ці міркування надалі припустимо, що G/G' – нерозкладна група, а сама G не є FN-групою. Ясно, що $\gamma_s(G')$ – скінченна нормальна підгрупа в G для певного індексу $s \in \mathbb{N}_0$, а G/G' – p-група для деякого простого числа p.

Доведемо, що комутант G' періодичний. Від супротивного. Якщо група G' не є періодичною, то знайдеться така G-інваріантна підгрупа $T \leq G'$, що

$$\gamma_s(G') \leq T \text{ та } \overline{G}' = G'/T$$

– нільпотентна група без скруту. Тому надалі без обмеження загальності доведення будемо вважати, що комутант G' – абелева група без скруту. Тоді G' – правий $\mathbb{Z}[G/G']$-модуль, де дія індукується спряженням на G', і за твердженням 1.6 знайдеться такий власний підмодуль N в G, що фактор-група G'/N – q-група для певного простого числа q, яке відмінне від p, а це веде до суперечності із зробленим припущенням. Таким чином, комутант G' періодичний. □

Лема 2.4. *Нехай G – недосконала група, всі власні нормальні підгрупи якої є FN-групами. Тоді група G задовольняє умову $Min - \overline{FN}$ в тому і тільки тому випадку, коли вірне одне із тверджень:*

(1) *G – FN-група;*

(2) *G – майже нільпотентна група;*

(3) *G – мінімальна не FN-група.*

Доведення. ($\Leftarrow$) Ця частина доведення є нескладною.

($\Rightarrow$) Припустимо, що група G задовольняє умову леми і, окрім того, G не є FN-групою (а тому не є скінченно породженою). Тоді за лемою 2.3 комутант G' – періодична π-група для деякої множини простих чисел π, а фактор-група G/G' – p-група для певного простого числа p. Розглянемо два можливі випадки.

a) Припустимо, що група G має власну нормальну підгрупу M скінченного індексу. Тоді $\gamma_k(M)$ – скінченна підгрупа в G для певного $k \in \mathbb{N}_0$ і, як наслідок,

$$S = M \bigcap C_G(\gamma_k(M))$$

– підгрупа скінченного індексу в групі G. Оскільки

$$S/(S \bigcap \gamma_k(M)) \cong S\gamma_k(M)/\gamma_k(M) \leq M/\gamma_k(M)$$

і

$$S \cap \gamma_k(M) \leq Z(S),$$

то S – нільпотентна група. Отож, G – NF-група.

b) Тепер нехай група G не містить власних підгруп скінченного індексу, а значить, фактор-група

$$G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$$

– квазіциклічна p-група для певного простого числа p. Позаяк $\gamma_s(G')$ – скінченна нормальна підгрупа в G для деякого індексу $s \in \mathbb{N}_0$, то маємо включення

$$\gamma_s(G') \leq Z(G),$$

а тому G' – нільпотентна підгрупа.

Якщо візьмемо скінченно породжену підгрупу F із G, то $G'F$ – власна нормальна підгрупа в G, а тому $\gamma_l(G'F)$ – скінченна нормальна підгрупа в G для деякого $l \in \mathbb{N}_0$ і

$$\gamma_l(G'F) \leq Z(G).$$

Це означає, що підгрупа $G'F$ нільпотентна. З цих міркувань також випливає, що G – локально скінченна p-група, всі власні нормальні підгрупи якої нільпотентні.

Припустимо, що група G містить підгрупу K, яка не є FN-групою. Тоді $G = G'K$. Розглянемо фактор-групу

$$\overline{G} = G/G''(K \bigcap G') = \overline{G}' \rtimes \overline{K}.$$

Припустимо, що

$$\overline{G} = \overline{T}_0 > \overline{T}_1 > \cdots > \overline{T}_n > \cdots \qquad (2.2.2)$$

– строго спадний ланцюг нормальних підгруп групи $\overline{G}$. Тоді

$$\overline{T}_n \leq \overline{G}'$$

для певного натурального числа n, а значить, ланцюг (2.2.2) обривається. Це означає, що $\overline{G}$ задовольняє умову мінімальності для нормальних підгруп $Min - n$. За твердженням 1.10 $\overline{G}$ – черніковська група і тому (див. твердження 1.22) справджується рівність

$$G' = G''(K \bigcap G') = K \bigcap G' \leq K.$$

Таким чином, $K = G$ та G – мінімальна не FN-група.

□

Тепер охарактеризуємо групи з умовою $Min-\overline{FN}$. Вірна така

Теорема 2.1. *Нехай G – група, яка не має неодиничних досконалих секцій. Тоді група G задовольняє умову мінімальності для не FN-підгруп $Min-\overline{FN}$ в тому і тільки тому випадку, коли вона належить до одного із типів:*

(1) *G – FN-група;*

(2) *G – майже нільпотентна група;*

(3) *G має таку нормальну підгрупу A скінченного індексу, що*

$$A = A_0 \cdot A_1 \cdots A_n \ (n \geq 1),$$

де A_i – група з нільпотентним комутантом $A_i' = A' \leq A_0$ і подільною черніковською p_i-групою A_i/A_i' $(i = 1, \ldots, n)$, A_0 – нільпотентна нормальна підгрупа із подільною черніковською фактор-групою A_0/A' (зокрема, A_0/A' одинична) і, крім того, $p_1, \ldots, p_n$ – попарно різні прості числа.

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай G – група, яка не має неодиничних досконалих секцій і задовольняє умову мінімальності $Min-\overline{FN}$. Розглянемо два можливі випадки.

1) Якщо в групі G всі власні нормальні підгрупи є FN-групами, то за лемами 2.3 і 2.4 дістаємо, що G – група одного із типів (1), (2) або (3) із умови теореми.

2) Припустимо, що група G має власну нормальну підгрупу, яка не є FN-групою. Тоді група G має такий строго спадний

скінченний ланцюг

$$G = G_0 > G_1 > \cdots > G_{n-1} > G_n,$$

що G_{i+1} – нормальна підгрупа в G_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, причому G_n не є FN-групою, але всі її нормальні підгрупи є FN-групами. Позначимо $H = G_n$. З огляду на лему 2.4, твердження 1.7 і 1.3 H – група типу Хайнекена-Мохамеда або група одного із типів (α_1), (α_2), (α_3) із твердження 1.3.

Якщо H – група типу (α_3), то H – черніковська група (як скінченна послідовність розширень черніковських груп за допомогою черніковських груп з огляду на лему 2.1), тобто H – це група типу (2) із умови теореми.

Тепер припустимо, що H – група типу Хайнекена-Мохамеда або група одного із типів (α_1), (α_2). Тоді H' – нільпотентна нормальна підгрупа в G_{n-1} і фактор-група G_{n-1}/H' черніковська. Через A_{n-1} позначимо таку підгрупу скінченного індексу в G_{n-1}, що A_{n-1}/H' – подільна частина фактор-групи G_{n-1}/H'. Тоді $A'_{n-1} = H'$. Окрім того, оскільки

$$(A_{n-1}A^g_{n-1})/H'$$

– черніковська група для кожного елемента $g \in G_{n-2}$ і комутант H' не має власних G-інваріантних підгруп скінченного індексу, то A_{n-1} – нормальна підгрупа в G_{n-2}. Міркуючи подібним чином далі, через скінченне число кроків отримаємо, що G містить таку нормальну підгрупу A скінченного індексу, що $A' = H'$ та A/A' – подільна черніковська група. Як наслідок,

$$A = A_1 \cdots A_n \ (n \geq 1),$$

де A_i/A' – силовська p_i-група групи A/A' $(i = 1, \ldots, n)$ та $p_1, \ldots, p_n$ – різні прості числа.

Якщо A_s – FN-група для певного індексу s (де $1 \leq s \leq n$), то вона абелева. З огляду на зроблене вище припущення знайдеться такий індекс m $(1 \leq m \leq n)$, що A_m не є FN-групою. Як і вище, встановлюється, що A_m має субнормальну підгрупу U, всі власні підгрупи якої містяться в класі FN, але сама U не є FN-групою. Тоді справджуються рівності

$$U' = A'_m = H'.$$

Отже, A_m – HM^*-група із нільпотентним комутантом A'_m, а сама G – група типу (3) із умови теореми.

$(\Leftarrow)$ Зрозуміло, що група типу (1) (відповідно (2)) задовольняє умову $Min - \overline{FN}$.

Нехай G – група типу (3) із умови теореми, а

$$G = K_0 > K_1 > \cdots > K_s > \cdots \tag{2.2.3}$$

– який-небудь строго спадний ланцюг її не FN-підгруп. Позаяк фактор-група G/A' черніковська, то знайдеться такий індекс $l \in \mathbb{N}_0$, що виконуються рівності

$$K_l A' = K_{l+1} A' = \cdots$$

Тоді K_l – NF-група. Із огляду на лему 2.2 ланцюг (2.2.3) через скінченне число кроків обривається. □

ВИСНОВКИ.

Охарактеризовано групи без неодиничних досконалих секцій, які задовольняють умову мінімальності для підгруп, що не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп (теорема 2.1).

2.3. Мінімальні не $\check{C}N$-групи

Одним із підходів до вивчення груп із "малою" системою не-χ підгруп – це досліджувати мінімальні не-χ групи (тобто групи, які не є χ-групами в той час, як всі їхні власні підгрупи є χ-групами). В теорії скінченних груп пошуки таких груп почалися більше, ніж сто років тому (приклад цього дають групи Міллера-Морено, тобто скінченні мінімальні неабелеві групи).

В теорії нескінченних груп прикладами таких є мінімальні ненільпотентні групи (зокрема, мінімальні ненільпотентні групи із субнормальними власними підгрупами, які прийнято називати групами типу Хайнекена-Мохамеда) (див. [65]); мінімальні не майже абелеві групи (див. [9] та [46]); мінімальні не майже нільпотентні групи [49]; мінімальні не FC-групи (див. [70], [71]); мінімальні не CC-групи (див. [83], [64], [41] та [84]); мінімальні не FN-групи [100], мінімальні не парарозв'язні групи [61] та інші.

М. Ксу [100] досліджував мінімальні не FN-групи, а Х. Отал і Х. Пена [81] розширили розглядуваний клас заміною терміну "скінченна група" на термін "черніковська група"; вони розглядали локально ступінчаті групи, всі власні підгрупи яких є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп. В [78] встановлено, що локально ступінчата група, всі власні підгрупи якої є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп класу нільпотентності c (де c – фіксоване натуральне число), сама є такою. В цьому розділі охарактеризуємо групи, всі власні підгрупи яких є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних. Нагадаємо, $\check{C}N$*-група* – це група, яка є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи.

Лема 2.5. *Нехай G – недосконала група. Якщо всі власні нормальні підгрупи групи G є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, то вірне одне із таких тверджень:*

(1) *G – розширення черніковської групи за допомогою нільпотентної групи;*

(2) *G/G' – квазіциклічна група і комутант G' – періодична підгрупа;*

(3) *фактор-група G/G' – циклічна група.*

Доведення. Якщо фактор-група G/G' розкладна, то

$$G = AB$$

– добуток двох власних нормальних підгруп A і B. Позаяк A і B – розширення черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, то група G є такою ж.

Припустимо, що фактор-група G/G' нерозкладна. За твердженням 1.20 фактор-група $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^n}$ – циклічна p-група (тоді G задовольняє умову (3)) або $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ – квазіциклічна p-група для певного простого числа p.

Надалі припускаємо, що фактор-група G/G' – квазіциклічна p-група, а сама група G не є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи. Доведемо, що G' – періодична група. Від супротивного. Припустимо, що комутант G' не є періодичним. Тоді, без обмеження загальності доведення, будемо вважати, що G' – абелева група без скруту.

Нехай q – просте число, яке відмінне від p. За твердженням 1.6 існує такий $\mathbb{Z}[G/G']$-підмодуль N в модулі G', що

$$\overline{G}' = G'/N$$

– q-група. Якщо a – довільний елемент групи G і $\overline{G} = G/N$, то $\overline{G}'\langle\overline{a}\rangle$ – абелева група, а це веде до суперечності. Таким чином, G' – періодична група. □

Лема 2.6. *Нехай G – недосконала група, всі власні підгрупи якої є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп. Якщо фактор-група G/G' циклічна, то група G сама є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи або комутант G' періодичний.*

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що група G не є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи і комутант G' не є періодичним. Тоді, без обмеження загальності доведення, будемо вважати, що G' – абелева група без скруту.

За умовою, $G = G'\langle a\rangle$ для певного елемента $a \in G$, причому

$$a^{p^n} \in G'$$

для деякого додатнього цілого числа n і простого числа p. Нехай q, r – різні прості числа, які є відмінними від p. За твердженням 1.6 знайдеться такий власний $\mathbb{Z}[G/G']$-підмодуль M із G', що фактор-група

$$\overline{G}' = G'/M = \overline{A} \times \overline{B}$$

– груповий прямий добуток нетривіальної q-підгрупи $\overline{A}$ і нетривіальної r-підгрупи $\overline{B}$. Якщо тепер A (відповідно B) – повний прообраз $\overline{A}$ (відповідно $\overline{B}$) в групі G, то $A\langle a\rangle$ і $B\langle a\rangle$ – дві власні підгрупи групи G. Тому знайдуться такі натуральні числа k і s, що

$$\gamma_k(A\langle a\rangle) \leq A \text{ та } \gamma_s(B\langle a\rangle) \leq B,$$

причому $\gamma_k(A\langle a\rangle)$ і $\gamma_s(B\langle a\rangle)$ – черніковські групи. Але тоді G – розширення черніковської групи за допомогою нільпотентної групи всупереч зробленому припущенню. □

Лема 2.7. *Нехай G – група із квазіциклічною фактор-групою G/G'. Тоді G – мінімальна не $\check{C}N$-група в тому і тільки тому випадку, коли G – група типу Хайнекена-Мохамеда.*

Доведення. ($\Leftarrow$) Очевидно.

($\Rightarrow$) Нехай G – мінімальна не $\check{C}N$-група і

$$G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$$

для певного простого числа p. Зрозуміло, що група G не містить власних підгруп скінченного індуксу. Нехай S – яка-небудь власна підгрупа із G. Розглянемо два можливі випадки.

(a) Припустимо, що $G'S$ – власна підгрупа групи G. Тоді $\gamma_m(G'S)$ – черніковська група для деякого натурального числа m. Позаяк фактор-група

$$G/C_G(\gamma_m(G'S))$$

скінченна, то маємо включення

$$\gamma_m(G'S) \leq Z(G),$$

а тому $G'S$ – нільпотентна підгрупа.

(b) Тепер припустимо, що $G'S = G$. Тоді $G^{(k-1)}S = G$ та $G^{(k)}S \neq G$ для деякого натурального числа $k \geq 2$. Покладемо

$$\overline{G} = G/G''.$$

Тоді знайдеться таке натуральне число l, що l-тий гіперцентр

$$\gamma_l(\overline{S})$$

– черніковська підгрупа, яка міститься в абелевій підгрупі $\overline{G}'$. Тому $\gamma_l(\overline{S})$ – нормальна підгрупа в $\overline{G}$ і маємо включення

$$\gamma_l(\overline{S}) \leq Z(\overline{G}).$$

Це означає, що $\overline{S}$ – нільпотентна група.

Підсумовуючи, із частин (a) і (b) випливає, що

$$\overline{G} = G/G''$$

– мінімальна ненільпотентна група. Позаяк $\overline{G}$ (а тому і $G/G^{(k)}$) – нерозкладна група, то частина (b) дає суперечність. Таким чином, G – мінімальна ненільпотентна група. □

Лема 2.8. *Якщо група G – розширення черніковської групи за допомогою нільпотентної групи, то G – черніковська група або комутант G' має нескінченний індекс в групі G.*

Доведення. За умовою, знайдеться таке натуральне число m, що $\gamma_m(G)$ – черніковська підгрупа. Якщо фактор-група $\overline{G} = G/\gamma_m(G)$ – скінченна група, то сама група G черніковська. Тому припустимо, що $\overline{G}$ – нескінченна група. Тоді фактор-група $\overline{G}/\overline{G}'$ також нескінченна, а це завершує доведення. □

М. Ньюмен і Дж. Вайголд [79] (див. також теорему 3.1 із [99]) описали будову мінімальних ненільпотентних груп з максимальною підгрупою (в таких групах не кожна власна підгрупа є субнормальною). За теоремою 3.1 із [99] кожна мінімальна ненільпотентна група із максимальною підгрупою є гіперцентральною групою, яка є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи.

Лема 2.9. *Нехай G – група, причому фактор-група G/G' – циклічна p-група. Якщо всі власні підгрупи із G є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, то G – розширення черніковської групи за допомогою нільпотентної групи.*

Доведення. Нехай G – група, всі власні підгрупи якої є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, причому фактор-група G/G' – циклічна p-група. Тоді

$$G = G'\langle a\rangle$$

для деякого такого елемента $a \in G$, причому маємо

$$a^{p^n} \in G'$$

для певного натурального числа n. Припустимо від супротивного, що G не є розширенням черніковської групи за допомогою нільпотентної групи. За лемою 2.6 G – періодична група.

Доведемо, що комутант G' не має власних підгруп скінченного індексу. Припустимо від супротивного, що H – власна G-інваріантна підгрупа скінченного індексу в G'. Тоді $H\langle a\rangle$ – власна підгрупа в G, а отже, $\gamma_s(H\langle a\rangle)$ – черніковська підгрупа для деякого натурального числа s. Оскільки комутант G' не є черніковською групою, то за лемою 2.8 робимо висновок, що G'' має нескінченний індекс в G'. Покладемо

$$\overline{G} = G/G''.$$

Якщо

$$\overline{H}\langle\overline{a}\rangle = (H\langle a\rangle G'')/G''$$

– черніковська група, то $\overline{G}$ також черніковська. Оскільки $\gamma_m(G')$ – черніковська підгрупа для деякого натурального числа m,

$$\gamma_m(G') \leq G'' \text{ і } G'/\gamma_m(G')$$

– нільпотентна група, то за наслідком ([88], стор. 19) фактор-група

$$G'/\gamma_m(G')$$

(а тому і сама підгрупа G') є черніковською групою, а це суперечить зробленому припущенню. З огляду на лему 2.8 це означає, що комутант

$$\left(\overline{H}\langle\overline{a}\rangle\right)'$$

має нескінченний індекс в $\overline{H}\langle\overline{a}\rangle$. Тоді фактор-група

$$\overline{G}/\left(\overline{H}\langle\overline{a}\rangle\right)'$$

– скінченне розширення свого центру, що суперчить твердженню 1.21. Це означає, що G' не має власних підгруп скінченного індексу. Позаяк $G'/\gamma_m(G')$ – подільна абелева група за твердженням 1.22, то

$$G'' = \gamma_m(G'),$$

і за твердженням 1.23 комутант

$$G' = C_{G'}(G'')$$

та, як наслідок, $G'' \leq Z(G')$. Отже, G' – подільна абелева група.

Нехай D – така квазіциклічна підгрупа із G', що

$$D \nsubseteq Z(G)$$

і $T = \langle D, a\rangle$. Припустимо, що $T \neq G$. Тоді $\gamma_k(T)$ – черніковська підгрупа для деякого натурального числа k і

$$\overline{T} = T/\gamma_k(T)$$

– нільпотентна група. Оскільки мамо включення

$$\overline{D} \subseteq Z(\overline{T})$$

за твердженням 1.24, то $\overline{T}$ – абелева група і комутант

$$T' = \gamma_k(T).$$

Отже, $T'\langle a\rangle$ – черніковська група і тому

$$D \leq C_T(T'\langle a\rangle).$$

Звідси дістаємо, що T – абелева група, що не так. Отримана суперечність показує, що $T = G$ та

$$\langle D^x \mid x \in G\rangle = G'.$$

Оскільки $C_G(D)$ має скінченний індекс в групі G, то комутант G' – черніковська підгрупа. Отримана суперечність закінчує доведення леми. □

Вірна така

Теорема 2.2. *Нехай G – недосконала група. Тоді G – мінімальна не $\check{C}N$-група в тому і тільки тому випадку, коли G – мінімальна ненільпотентна група із субнормальними власними підгрупами.*

Доведення. ($\Leftarrow$) Очевидно.

($\Rightarrow$) Випливає із лем 2.5, 2.7 та 2.9. □

ВИСНОВКИ.

Встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп в той час, як всі їх власні підгрупи є такими (тобто існують мінімальні не ČN-групи). Доведено, що недосконала група є мінімальною не ČN-групою тоді і тільки тоді, коли вона є групою типу Хайнекена-Мохамеда (теорема 2.2).

2.4. Умова мінімальності для негіперцентральних підгруп і субнормальність

Групи з умовою мінімальності для неабелевих підгруп дослідив С.М. Черніков [26], а групи з умовою мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп вивчав О.Д. Артемович [3]. В низці робіт Х. Сміта, Л.А. Курдаченка, В. Миреса, К. Касоло, Б. Брукса (див., наприклад, [94], [52], [97], [68], [96] і [43]) та інших досліджувався вплив субнормальності на будову групи. Нами встановлено, що в локально нільпотентній групі з умовою мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною (відповідно негіперцентральною) групою, субнормальна в групі.

Нагадаємо, група G, кожна власна підгрупа H якої відмінна від свого нормалізатора

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\},$$

називається *групою з нормалізаторною умовою.*

Лема 2.10. *Нехай G – локально нільпотентна група. Якщо виконується одна із умов:*

(i) G – група із умовою мінімальності для ненільпотентних підгруп $Min-\overline{N}$;

(ii) G – група із умовою мінімальності для негіперцентральних підгруп $Min-\overline{ZA}$,

то група G задовольняє нормалізаторну умову.

Доведення. Нехай G – група із умовою мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп, а H – її власна підгрупа.

Припустимо, що H – ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) або максимальна нільпотентна (відповідно гіперцентральна підгрупа) групи G. Тоді множина

$$\{S \mid H < S \leq G\}$$

містить мінімальний елемент. Нехай це буде підгрупа M_0. Тоді H – максимальна підгрупа в M_0, а тому за теоремою Бера-Маклейна (див. твердження 1.11) підгрупа H нормальна в M_0.

Оскільки кожна нільпотентна (відповідно гіперцентральна) підгрупа групи G задовольняє нормалізаторну умову, то група G задовольняє нормалізаторну умову. □

Теорема 2.3. *Нехай G – локально нільпотентна група. Тоді справджуються такі твердження:*

(i) якщо G задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною ненільпотентною групою, є субнормальною в G;

(*ii*) *якщо G задовольняє умову мінімальності для негіперцентральних підгруп, то кожна підгрупа, яка є мінімальною негіперцентральною групою, є субнормальною в G.*

Доведення. Припустимо, що група G задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп $Min - \overline{N}$ (відповідно $Min - \overline{ZA}$). Нехай H – підгрупа в G, яка є мінімальною ненільпотентною (відповідно негіперцентральною) групою.

Якщо комутант H' не є нормальною підгрупою в групі G, то його нормалізатор $N_G(H')$ є власною підгрупою в своєму нормалізаторі $N_G\left(N_G(H')\right)$. Оскільки кожна періодична радикальна абелева субінваріантна підгрупа є субнормальною, то підгрупа H/H' субнормальна в $N_G(H')/H'$.

Таким чином, підгрупа H – субнормальна підгрупа в M_0, де M_0 – підгрупа, про яку йде мова в лемі 2.10. Тому фактор-група M_0/H' має скінченний ряд, фактори якого задовольняють умову мінімальності для підгруп Min. Як наслідок, M_0/H' – черніковська група.

Нехай $t \in N_G(M_0) \setminus M_0$. Тоді $(H')^t$ – нормальна підгрупа в M_0, а значить,

$$M_0/(H' \cap (H')^t)$$

– черніковська група. Звідси дістаємо, що

$$H' = H' \cap (H')^t \subseteq (H')^t.$$

Зрозуміло, що $H' = (H')^t$, а це суперечить вибору елемента t. Таким чином, нами встановлено, що H' – нормальна підгрупа в групі G. Позаяк підгрупа H/H' є субінваріантною в фактор-групі G/H', то, з тих самих міркувань, що і вище, H/H' – субнормальна підгрупа в G/H'. Отже, H – субнормальна підгрупа в G. $\square$

Наслідок 2.2. *Нехай G – ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) локально нільпотентна група, яка задовольняє умову $Min - \overline{N}$ (відповідно $Min - \overline{ZA}$). Якщо всі власні нормальні підгрупи із G є нільпотентними (відповідно гіперцентральними), то G – мінімальна ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) група.*

Доведення. Нехай група G задовольняє умову $Min - \overline{N}$ (відповідно $Min - \overline{ZA}$), а H – її власна підгрупа. Припустимо, що H – мінімальна ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) група. За теоремою 2.3 отримаємо, що H – субнормальна підгрупа в групі G, а тому її нормальне замикання H^G – власна нормальна підгрупа в G. Окрім того, H^G – ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) підгрупа в G, а це веде до суперечності. Отже, H – мінімальна ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) група. $\square$

ВИСНОВКИ.

Доведено, що в групі G, яка задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп, кожна підгрупа, що є мінімальною ненільпотентною (відповідно мінімальною негіперцентральною) групою, субнормальна в G (теорема 2.3).

Встановлено також, що ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) локально нільпотентна група G, яка задовольняє умову $Min - \overline{N}$ (відповідно $Min - \overline{ZA}$) з нільпотентними (відповідно гіперцентральними) нормальними власними підгрупами, є мінімальною ненільпотентною (відповідно негіперцентральною) групою (наслідок 2.2).

Висновки до розділу 2

В цьому розділі досліджуються групи з умовою мінімальності для підгруп, які не є узагальнено нільпотентними.

В підрозділі 2.1 встановлено, що кожна локально ступінчата група, яка не є розширенням черніковської групи за допомогою абелевої групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих (наслідок 2.1). Аналогічним чином доведено, що кожна локально ступінчаста група, яка не є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських (наслідок 2.1). Встановлено, що недосконала локально ступінчата група із власними нормальними підгрупами, які є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, сама є такою (твердження 2.1). Із отриманих результатів випливає, що не існує груп, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими, та не існує груп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими.

В підрозділі 2.2 охарактеризовано групи без неодиничних досконалих секцій, що задовольняють умову мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп (теорема 2.1).

В підрозділі 2.3 встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими (тобто мінімальні не ČN-групи). Доведено, що недосконала група є мінімальною не ČN-групою тоді і тільки тоді, коли вона є групою типу Хайнекена-Мохамеда (теорема 2.2). Зазначимо, що з результатів досліджень Ф. Наполітані, Е. Пегораро [78] та Х. Отала, Х. Пени [81] випливає, що не існує груп, які не є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими (тобто не існує мінімальних не NČ-груп).

В підрозділі 2.4 доведено, що в групі G, яка задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп, кожна підгрупа, що є мінімальною ненільпотентною (відповідно мінімальною негіперцентральною) групою, субнормальна в G (теорема 2.3).

Встановлено також, що ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) локально нільпотентна група G, яка задовольняє умову $Min - \overline{N}$ (відповідно $Min - \overline{ZA}$) з нільпотентними (відповідно гіперцентральними) нормальними власними підгрупами, є мінімальною ненільпотентною (відповідно негіперцентральною) групою (наслідок 2.2).

РОЗДІЛ 3

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗНІ ГРУПИ З УМОВОЮ МАКСИМАЛЬНОСТІ ДЛЯ НЕ МАЙЖЕ АБЕЛЕВИХ ПІДГРУП

Будемо говорити, що група G *задовольняє умову максимальності для підгруп, які не є майже абелевими* (скорочено умову $Max - \overline{AF}$), якщо кожен строго зростаючий ланцюг

$$G_1 < G_2 < \cdots < G_n < \cdots$$

її підгруп G_i, які не є майже абелевими, через скінченне число кроків обривається. Кожна мінімальна не майже абелева група (тобто не майже абелева група, всі власні підгрупи якої майже абелеві) задовольняє умову $Max - \overline{AF}$.

Мінімальні не майже абелеві групи охарактеризовано В. В. Беляєвим [9] та, незалежно, Б. Бруно і Р. Філліпсом [46], [48], [51].

Зокрема, із [9] випливає, що мінімальна не майже абелева група G періодична і є групою Чаріна або нерозкладною метабелевою групою. Пізніше в [1] було встановлено, що нерозкладні метабелеві групи близькі до ненільпотентних груп, всі власні підгрупи яких субнормальні і нільпотентні.

Раніше Д.І. Зайцев і Л.А. Курдаченко [11] вивчали локально майже розв'язні групи з умовою максимальності для неабелевих підгруп. Зазначимо також, що дослідження груп з різними умовами максимальності проводяться надалі (див., наприклад, О.Д. Артемович [6], Л.А. Курдаченко та М.М. Семко [69], [77], М.С. Черніков [20] та інші).

3.1. Групи з умовою $Max - \overline{AF}$, які мають квазіциклічний гомоморфний образ

Попередньо встановимо необхідну надалі низку результатів.

Лема 3.1. *Нехай* G *– група, яка задовольняє умову максимальності для не майже абелевих підгруп* $Max - \overline{AF}$, *а* H *– її підгрупа. Тоді справджуються такі властивості:*

(1) *якщо* $H \leq G$, *то* H *задовольняє* $Max - \overline{AF}$;

(2) *якщо* $H \lhd G$, *то* G/H *задовольняє* $Max - \overline{AF}$;

(3) *якщо* $H \lhd G$ *і* H *не є майже абелевою, то* G/H *задовольняє умову максимальності для підгруп* Max.

Доведення. Нехай G – група, яка задовольняє умову максимальності для не майже абелевих підгруп $Max - \overline{AF}$.

(1) Якщо

$$H_1 < H_2 < \cdots < H_n < \cdots \tag{3.1.1}$$

– строго зростаючий ланцюг не AF-підгруп групи H, то (3.1.1) є строго зростаючим ланцюгом не AF-підгруп групи G, а тому він через скінченне число кроків стабілізується.

(2) Нехай H – нормальна підгрупа групи G. Якщо

$$\overline{T}_1 < \overline{T}_2 < \cdots < \overline{T}_s < \cdots \tag{3.1.2}$$

– строго зростаючий ланцюг не майже абелевих підгруп фактор-групи G/H і T_l – повний прообраз підгрупи $\overline{T}_l$ в групі G для кожного індексу l, то отримаємо строго зростаючий ланцюг

$$T_1 < T_2 < \cdots < T_s < \cdots \tag{3.1.3}$$

не майже абелевих підгруп групи G. Ланцюг (3.1.3) через скінченне число кроків стабілізується, а тому ланцюг (3.1.2) також обривається через скінченне число кроків.

(3) Нехай H – не майже абелева нормальна підгрупа групи G. Якщо (3.1.2) – строго зростаючий ланцюг підгруп фактор-групи G/H, а T_l – повний прообраз підгрупи $\overline{T}_l$ в групі G для кожного l, то (3.1.3) – строго зростаючий ланцюг не майже абелевих підгруп групи G, який стабілізується через скінченне число кроків внаслідок умови $Max-\overline{AF}$. Тому ланцюг (3.1.2) також стабілізується і фактор-група G/H задовольняє умову Max. □

Лема 3.2. *Нехай $G = A \rtimes B$ – напівпрямий добуток нормальної абелевої підгрупи A скінченної експоненти p і квазіциклічної q-підгрупи B, де p і q – різні прості числа. Якщо група G задовольняє умову $Max-\overline{AF}$ і всі її власні нормальні підгрупи майже абелеві, то вона майже абелева або*

$$G' = A = A_1 \times \ldots \times A_m$$

– скінченний прямий добуток G-інваріантних підгруп A_i, де $A_i \rtimes B$ – група Чаріна $(n \geq 1; i = 1, \ldots, n)$.

Доведення. Припустимо, що група G не має абелевих підгруп скінченного індексу. Зрозуміло, що напівпрямий добуток

$$[A, B] \rtimes B$$

– нормальна підгрупа в групі G. Якщо ця підгрупа майже абелева, то група G нільпотентна, а це веде до суперечності із зробленим припущенням. Отже, підгрупа $[A,B] \rtimes B$ не є майже абелевою і тому $A = [A,B]$.

Зрозуміло, що A – правий $\mathbb{F}_pB$-модуль стосовно дії, індукованої спряженням B на A, причому $\mathbb{F}_pB$ – регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце за твердженням 1.13. Розглянемо циклічний підмодуль uR, де u – такий ненульовий елемент із A, що $u \notin Z(G)$. Як відомо, uR ізоморфний правому R-модулю

$$R_0 = R/\operatorname{ann}_R(u).$$

З іншого боку, R_0 – комутативне регулярне (в сенсі фон Неймана) кільце, кожен ідеал якого є правим R-модулем. Якщо R_0 не є простим модулем, то він містить такий ненульовий елемент a_1, що a_1R_0 – власний ідеал кільця R_0. За твердженням 1.12 маємо $a_1R_0 = e_1R_0$ для певного ідемпотента e_1 та, крім того,

$$R_0 = e_1R_0 \oplus R_1$$

– кільцева пряма сума, де R_1 – деякий скінченно породжений ідеал кільця R_0. Якщо e_1R_0 не є простим правим R-модулем, то він містить деякий власний підмодуль e_2R_0, де $e_2^2 = e_2$. Як наслідок,

$$R_0 = e_2R_0 \oplus R_2$$

– кільцева пряма сума, де R_2 – такий ідеал із R_0, що $R_1 < R_2$. Міркуючи аналогічно дальше, отримаємо строго зростаючу послідовність

$$R_1 < R_2 < \cdots$$

підмодулів правого R-модуля R_0. Отже, модуль uR містить деяку строго зростаючу послідовність підмодулів $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Оскільки $u \notin Z(G)$, то знайдеться такий індекс k, що групи $A_m \rtimes B$ не є майже абелевими для всіх $m \geq k$. Тоді із умови $Max - \overline{AF}$ випливає, що

$$A_l = A_{l+1} = \dots$$

для певного індексу $l \in \mathbb{N}$. Це означає, що $e_l R_0$ – простий правий R-модуль. Таким чином, A містить деякий простий R-підмодуль P. Оскільки за твердженням 1.14 кільце R – V-кільце, то P – ін'єктивний правий R-модуль за твердженням 1.15. Тому P виділяється модульним прямим доданком в A за твердженням 1.16. Беручи до уваги умову $Max - \overline{AF}$, робимо висновок, що

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m \quad (m \geq 1)$$

– скінченна модульна пряма сума простих правих R-модулів A_i. Тоді за твердженням 1.17 випливає, що $A_i \rtimes B$ – група Чаріна для кожного $i = 1, \dots, m$. □

Твердження 3.1. *Нехай G – група без неодиничних досконалих секцій. Якщо G задовольняє $Max - \overline{AF}$ і всі її власні нормальні підгрупи майже абелеві, то G – майже абелева група або належить до одного з типів:*

(1) *G – мінімальна не майже абелева група;*

(2) *$G = G' \rtimes P$, де $P \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$, $G' = Q_1 \times \cdots \times Q_s$ – p'-підгрупа, яка є прямим добутком своїх силовських p_i-підгруп Q_i екс-*

понененти $p_i^{n_i}$*, причому*

$$\left(\Omega_{j+1}(Q)i) \rtimes P\right)/\Omega_j(Q_i)$$

– група Чаріна $(n_i \in \mathbb{N}; i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, n_i)$*;*

(3) $G = A \rtimes P$*, де* A *– мінімальна не майже абелева група,* $G' = A \rtimes P'$ *та* G/P' *– група типу* (2)*.*

Доведення. Якщо фактор-група G/G' – добуток двох власних підгруп, то G майже абелева. У випадку, коли фактор-група G/G' не розкладається у добуток власних підгруп, вона є циклічною p-групою (тоді G майже абелева) або квазіциклічною p-групою для деякого простого числа p.

Нехай $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$. Тоді, очевидно, G' – абелева підгрупа. Припустимо, що G не є майже абелевою, і розглянемо можливі випадки.

(1) Нехай комутант G' – періодична група. Тоді G – π-група для деякої скінченної множини простих чисел π. Як наслідок, G – p-група або $G = Q \rtimes P$, де P – p-підгрупа, а

$$Q = Q_1 \times \cdots \times Q_s$$

– груповий прямий добуток силовських p_i-підгруп Q_i $(i = 1, \dots, s)$.

(a) Якщо G – неабелева p-група, то кожна її власна не майже абелева підгрупа K міститься в максимальній підгрупі M із G. Враховуючи, що

$$M \lhd G \text{ та } MG' = G,$$

дістаємо суперечність. Отже, G – мінімальна не майже абелева група.

(b) Нехай G не є p-групою. Тоді або P – абелева група (а тому $P \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$), або, як випливає із частини (a), P – мінімальна не майже абелева група.

(b_1) Якщо G' – p'-група, то

$$\{\Omega_n(Q_i) \rtimes P \mid n \in \mathbb{N}\}$$

– строго зростаючий ланцюг не майже абелевих підгруп із G.

Позначимо підгрупу

$$H_i = Q_i \rtimes P,$$

де

$$exp(Q_i) = p_i^{n_i}$$

для деякого $n_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Ясно, що комутант

$$H_i' = [Q_i, P] = Q_i.$$

Якщо для певного j $(1 \le j \le n_i - 1)$ підгрупа $\Omega_j(Q_i) \rtimes P$ майже абелева, то вона абелева та маємо включення

$$\Omega_1(Q_i) \le Z(H_i).$$

Позаяк маємо також включення

$$[\Omega_{j+1}(Q_i), P] \le \Omega_1(Q_i),$$

то підгрупа $\Omega_{j+1}(Q_i)P$ абелева. Тоді група H_i також абелева, а це не так. Отже, фактор-група

$$(\Omega_{j+1}(Q_i) \rtimes P) / \Omega_j(Q_i)$$

не є майже абелевою і за лемою 3.2 вона є групою Чаріна для кожного індексу j.

(b_2) Якщо P – мінімальна не майже абелева p-група, то $P/P' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$, а тому G/P' – група типу (3).

(2) Тепер припустимо, що комутант G' не є періодичною групою. Позаяк G' містить нормальну абелеву підгрупу скінченного індексу S таку, що за твердженням 2.1 її нормальне замикання S^G – нільпотентна група і G'/S^G скінченна, то періодична частина $\tau(G')$ нормальна в групі G та, без обмеження загальності будемо вважати, що G' – абелева група без скруту. Тоді за твердженням 1.6 робимо висновок, що $\mathbb{Z}[G/G']$-модуль G', де дія на G' індукована спряженням, містить такий власний підмодуль N, що G'/N – p-група. Отже, G/N – p-група, яка не є майже абелевою, а тому, за доведеним вище, G/N – мінімальна не майже абелева група. За твердженням 1.4 фактор-група G/N не розкладається в добуток своїх власних підгруп. Якщо G також не розкладається в добуток своїх власних підгруп і L – деяка власна її не майже абелева підгрупа, то L міститься в максимальній підгрупі M із G. Як наслідок, $G = G'M$, а це веде до суперечності. Отже, в цьому випадку всі власні підгрупи із G майже абелеві, а це неможливо. Якщо ж група G розкладна, то $G = TN$ для деякої власної не майже абелевої підгрупи T. Знову за твердженням 1.6 випливає, що $\mathbb{Z}[G/G']$-модуль $N \cap T$ містить власний підмодуль N_1, для якого $(N \cap T)/N_1$ – p-група, а це веде до суперечності. Таким чином, G' – періодична група. □

Наслідок 3.1. *Якщо група* G *задовольняє умову* $Max-\overline{AF}$ *та* $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$, *то* G *майже абелева або належить до одного із типів* $(1)-(3)$ *із твердження* 3.1.

ВИСНОВКИ.

Описано групи без неодиничних досконалих сукцій з умовою максимальності для не майже абелевих підгруп, всі власні нормальні підгрупи яких є майже абелевими (твердження 3.1). Охарактеризовано групи з квазіциклічним гомоморфним образом за комутантом, які задовольнять умову максимальності для не майже абелевих підгруп (наслідок 3.1).

3.2. Будова періодичних розв'язних груп із умовою $Max-\overline{AF}$

В цьому підрозділі охарактеризуємо періодичні розв'язні групи із умовою $Max-\overline{AF}$.

Лема 3.3. *Якщо* G *– періодична група з умовою* $Max-\overline{AF}$, *то вірна одна із таких умов:*

(1) G *– майже абелева група;*

(2) G' *– підгрупа скінченного індексу в* G*;*

(3) G *містить нормальну майже абелеву підгрупу* A *з квазіциклічною фактор-групою* G/A.

Доведення. За твердженням 1.18 фактор-група

$$\overline{G} = G/G' = D/G' \times F/G'$$

– прямий добуток подільної частини $\overline{D} = D/G'$ і редукованої підгрупи $\overline{F} = F/G'$. Розглянемо можливі випадки.

(a) Якщо $\overline{D}$ – одинична група, то $\overline{G} = \overline{F}$ – скінченна група.

(b) Припустимо, що $\overline{D} \neq \overline{1}$. Тоді G має квазіциклічний гомоморфний образ, а отже, для групи G справджується умова (3). □

Твердження 3.2. *Нехай G – періодична група, яка містить нормальну майже абелеву підгрупу A з квазіциклічною фактор-групою G/A. Якщо G задовольняє $Max - \overline{AF}$, то G майже абелева або знайдеться нормальна підгрупа N одного із типів* (1) – (3) *із твердження* 3.1 *така, що фактор-група G/N задовольняє умову максимальності Max.*

Доведення. Без обмеження загальності доведення будемо вважати, що підгрупа A абелева. За твердженням 1.18 фактор-група

$$\overline{G} = G/G' = D/G' \times F/G'$$

– груповий прямий добуток подільної частини $\overline{D} = D/G'$ і редукованої підгрупи $\overline{F} = F/G'$. Нехай $\overline{B} = B/G'$ – p-базова підгрупа із $\overline{F}$. Якщо $\overline{B}$ не є скінченно породженою, то за твердженням 1.19 фактор-група

$$\overline{F}/\overline{B}^p = B_0 \times D_0$$

– прямий груповий добуток нескінченної абелевої p-підгрупи B_0 і деякої p-подільної підгрупи D_0. Тоді звідси легко випливає, що група G майже абелева. З огляду на сказане вище, далі вважаємо, що $\overline{B}$ – скінченно породжена група і G не має абелевих підгруп скінченного індексу. Розглянемо можливі випадки.

(a) Нехай $\overline{D}$ – неодинична група. Тоді з огляду на зроблені припущення $\overline{D} \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ і підгрупа $\overline{F}$ скінченна. Неважко встановити, що D – група одного із типів $(1) - (3)$.

(b) Якщо $\overline{D} = \overline{1}$, то фактор-група $\overline{A} = A/G'$ скінченна. Тоді G – група одного із типів $(1) - (3)$. $\square$

Має місце (основна в цьому розділі) така

Теорема 3.1. *Нехай G – періодична розв'язна група. Тоді G задовольняє умову $Max-\overline{AF}$ в тому і тільки в тому випадку, коли вона майже абелева група або $G = HF$ – локально майже абелева група, де $H'F$ – майже абелева підгрупа, $|G : H| < \infty$ і H належить до одного із типів:*

(i) *H – мінімальна не майже абелева група;*

(ii) *$H = H' \rtimes P$, де P – квазіциклічна p-група,*

$$H' = Q_1 \times \cdots \times Q_s$$

– p'-група, яка є прямим добутком своїх силовських p_i-підгруп Q_i експоненти $p_i^{n_i}$, причому

$$\left(\Omega_{j+1}(Q_i) \rtimes P\right)/\Omega_j(Q_i)$$

– група Чаріна $(n_i \in \mathbb{N}; i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, n_i)$;

(iii) *$H = A \rtimes P$, де P – мінімальна не майже абелева група, $H' = A \rtimes P'$ та H/P' – група типу (ii).*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай G – періодична розв'язна група з умовою $Max-\overline{AF}$. З огляду на лему 3.3 і твердження 3.2 залишилось розглянути випадок, коли фактор-група G/G' скінченна, що ми і зробимо нижче.

Припустимо, що фактор-група G/G' скінченна і група G не містить абелевих підгруп скінченного індекса. Тоді знайдеться таке $k \in \mathbb{N}$, що k-тий комутант $G^{(k)}$ не є майже абелевою групою в той час, як $G^{(k+1)}$ – майже абелева підгрупа, причому фактор-група $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ нескінченна. За лемою 3.3 група $G^{(k)}$ містить нормальну майже абелеву підгрупу A із квазіциклічною фактор-групою $G^{(k)}/A$. Тоді за твердженням 3.2 група G містить нормальну підгрупу H скінченного індекса одного із типів: (i), (ii) або (iii).

($\Leftarrow$) Достатньо встановити, що підгрупа H задовольняє умову максимальності для не майже абелевих підгруп $Max-\overline{AF}$. Зрозуміло, що мінімальна не майже абелева група H задовольняє умову $Max-\overline{AF}$.

З огляду на те, що для групи фактор-групи

$$\left(\Omega_{j+1}(Q_i) \rtimes P\right)/\Omega_j(Q_i)$$

є групами Чаріна ($i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, n_i$), отримуємо що групи H типів (ii) та (iii) також задовольняють умову максимальності $Max-\overline{AF}$.

□

ВИСНОВКИ.

Опираючись на відомі результати Дж. фон Неймана, І. Капраського та інших з теорії кілець та модулів, охарактеризовано періодичні розв'язні групи з умовою максимальності для підгруп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою скінченних груп (теорема 3.1).

Висновки до розділу 3

В цьому розділі досліджено періодичні групи без неодиничних досконалих секцій з умовою максимальності $Max-\overline{AF}$ для не майже абелевих підгруп.

В підрозділі 3.1 описано групи без неодиничних досконалих секцій з умовою максимальності для не майже абелевих підгруп, всі власні нормальні підгрупи яких є майже абелевими (твердження 3.1). Охарактеризовано також групи з квазіциклічним гомоморфним образом за комутантом, які задовольнять умову максимальності для не майже абелевих підгруп (наслідок 3.1).

В підрозділі 3.2 досліджено будову періодичних розв'язних груп з умовою максимальності для підгруп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою скінченних груп (теорема 3.1).

РОЗДІЛ 4

ГРУПИ І БРЕЙСИ

Якщо $(R, +, \cdot)$ – асоціативне кільце, то операція $"\circ"$, визначена за правилом

$$a \circ b = a + b + a \cdot b$$

для будь-яких елементів $a, b \in R$, називається *круговим* або *приєднаним* множенням. Тоді $(R, \circ)$ – напівгрупа з нейтральним елементом $0 \in R$. Якщо $(R, \circ)$ – група (тоді вона позначається символом R°), то кільце R називається *радикальним.* Поняття кругової операції в 40-их роках минулого століття ввів С. Перліс з метою характеризації радикала Джекобсона в асоціативному кільці.

В цьому розділі розглядаємо брейси A, введені В. Румпом [92]. Брейс є природним узагальненням радикального кільця. Зокрема, брейс є асоціативним (стосовно операції множення $"\cdot"$) тоді і тільки тоді, коли він є радикальним кільцем. Нижче для брейса A побудовано асоційовану з ним групу $H(A)$ (див. лему 4.1 і нижче) і досліджено зв'язки між асоційованими групами брейса, його підбрейса (лема 4.2) та фактор-брейса (леми 4.4 та 4.5). Встановлено необхідну і достатню умову, за якої група $H(L, T)$ асоційована з підмодулем L деякого A-модуля і підгрупою $T \leq A^\circ$ – група Фробеніуса (теорема 4.1). Наведено приклад скінченного брейса A з групою Фробеніуса $H(A)$ (приклад 4.1). Розглядаються також брейси A з періодичною приєднаною групою A° (лема 4.7) та встановлюється, за яких умов адитивна група A^+ нільпотентного справа (відповідно зліва) брейса A буде p-групою (відповідно групою без скруту) (твердження 4.8). Також досліджується зв'язок між нільпотентністю брейса A та його асоційованої групи $H(A)$ (теорема 4.2).

Згідно з [92], непорожна множина A, на якій визначено дві алгебраїчні операції ” + ” та ” · ”, називається *брейсом* (=brace), якщо виконуються такі умови:

(i) $A^+ = (A, +)$ – абелева група (з нулем 0);

(ii) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ для будь-яких елементів $a, b, c \in A$;

(iii) A – група стосовно операції приєднаного множення ” ∘ ” , визначеної за правилом

$$a \circ b = a + b + a \cdot b$$

для елементів $a, b \in A$.

Із асоціативності операції ” ∘ ” в брейсі A випливає, що

(iv) $a \cdot (a \circ b) = (a \cdot b) \cdot c + (a \cdot b) + (a \cdot c)$ для всіх елементів $a, b, c \in A$.

Група $(A, \circ)$ називається *приєднаною групою* брейса A і позначається через A°. Зрозуміло, що

$$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$$

для всіх $a \in A$ та 0 – нейтральний елемент групи A°. Домовимось елемент, обернений до елемента $b \in A^\circ$, позначати через

$b^{(-1)}$. Абелева група $(M,+)$ із нейтральним елементом e називається *модулем над брейсом* A, якщо існує відображення

$$M \times A \ni (x,a) \to xa \in M,$$

яке для будь-яких елементів $x, y \in M$ та $a, b \in A$ задовольняє такі умови:

m_1) $(x+y)a = xa + ya$;

m_2) $x(a \circ b) = (xa)b + xa + xb$;

m_3) $x0 = e$.

Над брейсом не має поняття "лівого" чи "правого" модуля, а тільки "модуля". Оскільки

$$ea = (e+e)a = ea + ea,$$

то

$$ea = e$$

для будь-якого елемента $a \in A$. На основі цього і рівності

$$x + (-x) = e$$

обчислюємо

$$0 = ea = (x + (-x))a = xa + (-x)a,$$

а тому

$$(-x)a = -(xa) = -xa.$$

Підмножина L із M називається *підмодулем* модуля M, якщо виконуються такі дві умови:

- L – підгрупа в $(M,+)$;
- $la \in L$ для будь-яких елементів $l \in L$ та $a \in A$.

4.1. Група, асоційована з брейсом

Я. П. Сисак [18] у 1982 році побудував групу, асоційовану з радикальним кільцем. Пізніше О.Д. Артемович [37] розширив цю конструкцію на випадок лівого модуля над довільним асоціативним кільцем R. Ю.Б. Іщук [67] досліджував властивості асоційованої групи $G(R)$ для асоціативного (можливо, без одиниці) кільця R. Нижче побудовано групу $H(L,T)$, асоційовану з підмодулем L модуля, який розглядається над довільним брейсом A, та підгрупою T приєднаної групи A°.

Нехай A – брейс, L – підмодуль A-модуля M, T – підгрупа із приєднаної групи A°. На множині пар

$$H(L,T) = \{(l,t) \mid l \in L, t \in T\}$$

визначимо операцію множення за правилом

$$(x,y)(u,v) = (xv + x + u, y \circ v) \tag{4.1.1}$$

для елементів $x, u \in L$ та $y, v \in T$.

Має місце така

Лема 4.1. *Нехай M – модуль над брейсом A. Якщо L – підмодуль із M, а T – підгрупа із A°, то*

$$H(L,T) = E \rtimes T$$

– група стосовно операції, визначеної за правилом (4.1.1)*, причому $E = \{(l,0) \mid l \in L\}$ ізоморфна адитивній групі $(L,+)$, а $F = \{(e,t) \mid t \in T\}$ ізоморфна групі T.*

Доведення. Для будь-яких елементів $x, u, w \in L$ та $y, v, z \in T$ встановлюємо:

1) асоціативність множення

$$((x,y)(u,v))(w,z) = (xv + x + u, y \circ v)(w,z) =$$
$$= ((xv + x + u)z + xv + x + u + w, (y \circ v) \circ z) =$$
$$= ((xv)z + xz + uz + xv + x + u + w, (y \circ v) \circ z)$$
$$(x,y)\left((u,v)(w,z)\right) = (x,y)(uz + u + w, v \circ z) =$$
$$= (x(v \circ z) + x + uz + u + w, y \circ (v \circ z)) =$$
$$= ((xv)z + xv + xz + x + uz + u + w, y \circ (v \circ z))$$

тобто множення є асоціативним в $H(L,T)$.

2) існування нейтрального елемента

$$(x,y)(e,0) = (x0 + x + e, y \circ 0) = (x,y) =$$
$$= (ey + e + x, 0 \circ y) = (e,0)(x,y),$$

тобто $(e,0)$ – нейтральний елемент стосовно множення, визначеного за правилом (4.1.1).

3) Нехай $(a,b) \in H(L,T)$. Знайдемо такий елемент $(x,y) \in H(L,T)$, що

$$(a,b)(x,y) = (e,0) = (x,y)(a,b)$$

або, рівносильно, знайдемо розв'язок системи рівнянь (невідомими є x та y):

$$\begin{cases} ay + a + x = e, \\ \qquad b \circ y = 0, \\ xb + x + a = e, \\ \qquad y \circ b = 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що $y = b^{(-1)}$ є оберненим елементом до b в групі A° та $x = -a - ab^{(-1)}$. Отже, обернений елемент знаходиться за формулою

$$(a, b)^{-1} = (-a - ab^{(-1)}, b^{(-1)}) \in H(L, T).$$

Таким чином, $H(L, T)$ – група.

4) Окрім того, для кожного елемента $(u, v) \in E \rtimes F$ маємо:

a) розклад в добуток підгруп

$$FE \ni (e, v)(u, 0) = (u, v) = (u, 0)(e, v) = (uv + u + e, 0 \circ v).$$

b) для кожного $l \in L$ знаходимо

$$(l, 0)^{(u,v)} = (u, v)^{-1}(l, 0)(u, v) = (-u - uv^{(-1)}, v^{(-1)})(l, 0)(u, v) =$$
$$= ((-u - uv^{(-1)})0 - u - uv^{(-1)} + l, v^{(-1)} \circ 0)(u, v) =$$
$$= (-u - uv^{(-1)} + l, v^{(-1)})(u, v) =$$
$$= ((-u - uv^{(-1)} + l)v - u - uv^{(-1)} + l + u, v^{(-1)} \circ v) =$$
$$= (-uv - (uv^{(-1)})v + lv - u - uv^{(-1)} + l + u, 0) =$$
$$= (-uv - (uv^{(-1)})v - uv^{(-1)} + lv + l, 0) =$$
$$= (-u(v^{(-1)} \circ v) + lv + l, 0) =$$
$$= (-u0 + lv + l, 0) = (lv + l, 0) \in F,$$

тобто E – нормальна підгрупа в групі $H(L, T)$.

c) Зрозуміло, що перетин $E \cap F = \{(e, 0)\}$ тривіальний. Нами встановлено, що

$$H(L, T) = E \rtimes F$$

– напівпрямий добуток підгруп E та F. На завершення доведення залишається зауважити, що відображення

$$\varphi : L \ni l \to (l, 0) \in E$$

та

$$\psi : T \ni t \to (e, t) \in F$$

– ізоморфізми груп. □

Наслідок 4.1. *Група $H(L, T)$ абелева тоді і тільки тоді, коли $LT = \{e\}$ та T – абелева група.*

Доведення. Справді, для довільних елементів $x, u \in L$ та $y, v \in T$ рівність

$$(x, y)(u, v) = (u, v)(x, y)$$

рівносильна тому, що

$$\begin{cases} xv + x + u = uy + u + x, \\ y \circ v = v \circ y, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} xv = uy, \\ yv = vy. \end{cases}$$

Друга рівність означає, що T – абелева група. Оскільки y – довільний елемент із T (зокрема, $y = 0$), то $xv = e$. Це означає, що добуток $LT = \{e\}$ тривіальний.

□

Як звичайно [93], непорожна підмножина S із брейса A називається *підбрейсом*, якщо виконуються такі умови:

s_1) $(S,+)$ – підгрупа в $(A,+)$;

s_2) $uv \in S$ для будь-яких $u, v \in S$.

Зрозуміло, що $\{0\}$, A – тривіальні підбрейси в A. Окрім того, брейс A є модулем над самим собою. Тому кожен підмодуль I з A-модуля називається *правим ідеалом* в A (див. [92]). Поняття "лівого ідеала" для брейса не вводиться. Таким чином, I – правий ідеал брейса A в тому і тільки тому випадку, коли виконуються такі умови:

i_1) $(I,+)$ – підгрупа в $(A,+)$,

i_2) $ia \in I$ для довільних елементів $i \in I$ та $a \in A$.

Якщо, крім того, виконується умова

i_3) $ai \in I$ для довільних $i \in I$ та $a \in A$, то I називається *двобічним ідеалом* (або коротко *ідеалом*) брейса A (див. [92]). Кожен (правий чи двобічний) ідеал із A є підбрейсом в A.

Для брейса A розглядатимемо:

- лівий анулятор

$$\operatorname{ann}_l A = \{u \in A \mid uA = \{0\}\},$$

- правий анулятор

$$\operatorname{ann}_r A = \{v \in A \mid Av = \{0\}\}.$$

Якщо $a \in A$ та $u_1, u_2 \in \operatorname{ann}_l A$, то

$$(u_1 a)A = 0 \cdot A = \{0\},$$

$$(u_1 - u_2)A = u_1A - u_2A = \{0\},$$

тобто $\operatorname{ann}_l A$ – правий ідеал в A.

Якщо $a \in A$ та $v_1, v_2 \in \operatorname{ann}_r A$, то

$$A(av_1) = A \cdot 0 = \{0\},$$

$$A(v_1 - v_2) = Av_1 - Av_2 = \{0\}.$$

В твердженні 7 із [92] доведено, що підмножина $\operatorname{ann}_r A$ замкнена також стосовно домноження справа. Тобто $\operatorname{ann}_r A$ – двобічний ідеал брейса A. Зазначимо, що в роботі [92] правий анулятор $\operatorname{ann}_r A$ позначається через $\operatorname{Soc}(A)$ та $\operatorname{Soc}_1(A)$ і називається *цоколем*. Зрозуміло, що анулятор

$$\operatorname{ann} A = \operatorname{ann}_r A \cap \operatorname{ann}_l A$$

– правий ідеал в A.

Нехай $n \in \mathbb{Z}$ та

$$nA = \{na \mid a \in A\}.$$

Тоді для довільних елементів $a, b, t \in A$ і $n > 0$ маємо

$$na - nb = \underbrace{(a + \cdots + a)}_{n \text{ разів}} +$$
$$+ \underbrace{(a + \cdots + a)}_{n \text{ разів}} = \underbrace{(a - b) + \cdots + (a - b)}_{n \text{ разів}} =$$
$$= n(a - b) \in nA.$$

Подібні міркування спрацьовують, якщо $n < 0$ або $n = 0$. Окрім того, для $n > 0$ маємо

$$(na)t = \underbrace{(a + \cdots + a)}_{n \text{ разів}} t = \underbrace{(at + \cdots + at)}_{n \text{ разів}} = n(at) \in nA.$$

Таким чином, nA – правий ідеал в брейсі A.

Нехай

$$\Omega_1(A) = \{a \in A \mid na = 0\}.$$

Якщо $a_1, a_2 \in \Omega_1(A)$ та $t \in A$, то $n(a_1 - a_2) = 0$ та

$$n(a_1 t) = \underbrace{a_1 t + \cdots + a_1 t}_{n \text{ разів}} = \underbrace{(a_1 + \cdots + a_1)}_{n \text{ разів}} t = 0t = 0,$$

тобто $a_1 t \in \Omega_1(A)$. Отже, нами встановлена така

Лема 4.2. *Множини nA, $\Omega_1(A)$ – праві ідеали в брейсі A ($n \in \mathbb{N}$).*

Елемент $a \in A$ називається *лівим дільником нуля*, якщо:

a_1) $a \neq 0$,

a_2) $ab = 0$ для деякого ненульового елемента $b \in A$.

Елемент $a \in A$ називається *правим дільником нуля*, якщо:

a_1) $a \neq 0$,

a_3) $ca = 0$ для деякого ненульового елемента $c \in A$.

Якщо виконуються умови a_1), a_2), a_3), то a називається *дільником нуля* в A.

Подібно як в [18], групу $H(A) = H(A^+, A^\circ)$ будемо називати *асоційованою групою* брейса A. Зрозуміло, що $(0,0)$ – нейтральний елемент в $H(A)$.

Встановимо деякі елементарні властивості групи $H(A)$.

Лема 4.3. *Нехай A – брейс з асоційованою групою $H(A) = E \rtimes F$. Якщо S – підбрейс в A із асоційованою групою $H(S) = U \rtimes W$, то справджуються такі властивості:*

(*a*) $H(S) \leq H(A)$, $U \leq E$, $W \leq F$;

(*b*) *якщо* S *– правий ідеал в* A, *то* U *– нормальна підгрупа в* $H(A)$;

(*c*) *якщо* S *– двобічний ідеал в* A, *то* $U \lhd H(A)$ *та* $H(S) \lhd H(A)$;

(*d*) *якщо* $U \lhd H(A)$, *то* $SA \subseteq S$;

(*e*) *якщо* $H(S) \lhd E \rtimes W$, *то* $AS \subseteq S$;

(*f*)

$$C_E(F) = \left\{(a,0) \in E \mid a \in \operatorname{ann}_l A\right\},$$

$$C_F(E) = \left\{(0,u) \in F \mid u \in \operatorname{ann}_r A\right\};$$

зокрема, якщо A *не має дільників нуля, то*

$$C_E(F) = C_F(E) = \langle (0,0) \rangle.$$

Доведення. (*a*) Випливає безпосередньо із означення асоційованої групи.

(*b*) Нехай S – правий ідеал в A, а тому $sa \in S$ для будь-яких $s \in S$ та $a \in A$. Тоді для довільних елементів $(a,b) \in H(A)$ та $(s,0) \in U$ знаходимо, що

$$(s,0)^{(a,b)} = (a,b)^{-1}(s,0)(a,b) =$$

$$= (-a - ab^{(-1)}, b^{(-1)})(s,0)(a,b) =$$

$$= ((-a - ab^{(-1)})0 - a - ab^{(-1)} + s, b^{(-1)} \circ 0)(a,b) =$$

$$= (-a - ab^{(-1)} + s, b^{(-1)})(a,b) =$$

$$= ((-a - ab^{(-1)} + s)b - a - ab^{(-1)} + s + a, b^{(-1)} \circ b) =$$

$$= (-ab - (ab^{(-1)})b + sb - ab^{(-1)} + s, 0) =$$
$$= (-a(b^{(-1)} \circ b) + sb + s, 0) =$$
$$= (-a0 + sb + s, 0) = (sb + s, 0) \in U, \qquad (4.1.2)$$

а отже, U – нормальна підгрупа в групі $H(A)$.

(c) Нехай S – двобічний ідеал брейса A, $(a, b) \in H(A)$ та $(s, t) \in H(S)$. Тоді обчислюємо, що

$$(s, t)^{(a,b)} = (a, b)^{-1}(s, t)(a, b) =$$
$$= (-a - ab^{(-1)}, b^{(-1)})(s, t)(a, b) =$$
$$= ((-a - ab^{(-1)})t - a - ab^{(-1)} + s, b^{(-1)} \circ t)(a, b) =$$
$$= (-at - (ab^{(-1)})t - a - ab^{(-1)} + s, b^{(-1)} \circ t)(a, b) =$$
$$= ((-at - (ab^{(-1)})t - a - ab^{(-1)} + s)b - at - (ab^{(-1)})t-$$
$$-a - ab^{(-1)} + s + a, b^{(-1)} \circ t \circ b) =$$
$$= (-(at)b - ((ab^{(-1)})t) - ab - (ab^{(-1)})b + sb - at - (ab^{(-1)})t-$$
$$-ab^{(-1)} + s, b^{(-1)} \circ t \circ b) =$$
$$= (-a(b^{(-1)} \circ b) - (at)b - at - ((ab^{(-1)})t)b + sb + s - (ab^{(-1)})t,$$
$$b^{(-1)} \circ t \circ b) =$$
$$= (-(at)b - at - ((ab^{(-1)})t)b + sb + s - (ab^{(-1)})t,$$
$$t + tb + (b^{(-1)}t)b + b^{(-1)}t) \in H(S),$$

тобто $H(S)$ – нормальна підгрупа $H(A)$.

(d) Позаяк $U \lhd H(A)$, то із співвідношення (4.1.2) дедукуємо, що $sb + s \in S$ для будь-яких $s \in S$, $b \in A$, а тому $sb \in S$.

(e) Нехай $H(S) \lhd E \rtimes W$. Тоді для будь-яких елементів $a \in A$ та $u, v, w \in S$ маємо

$$H(S) \ni (u,v)^{(a,w)} = (a,w)^{-1}(u,v)(a,w) =$$

$$= (-a - aw^{(-1)}, w^{(-1)})(u,v)(a,w) =$$

$$= ((-a - aw^{(-1)})v - a - aw^{(-1)} + u, w^{(-1)} \circ v)(a,w) =$$

$$= (-av - (aw^{(-1)})v - a - aw^{(-1)} + u, w^{(-1)} \circ v)(a,w) =$$

$$= ((-av - (aw^{(-1)})v - a - aw^{(-1)} + u)w-$$

$$-av - (aw^{(-1)})v - a - aw^{(-1)} + u + a, w^{(-1)} \circ v \circ w) =$$

$$= (-(av)w - ((aw^{(-1)})v)w - aw - (aw^{(-1)})w + uw-$$

$$-av - (aw^{(-1)})v - aw^{(-1)} + u, w^{(-1)} \circ v \circ w) =$$

$$= (-(av)w - ((aw^{(-1)})v)w + uw-$$

$$-av - (aw^{(-1)})v + u, v + vw + (w^{(-1)}v)w + w^{(-1)}v).$$

З цієї рівності при $w = 0$ отримуємо, що $(-av + u, v) \in H(S)$, тобто $AS \subseteq S$.

(f) Нехай $(a, 0) \in C_E(F)$. Тоді виконується рівність

$$(a,0)(0,b) = (0,b)(a,0)$$

для кожного $b \in A$, а тому

$$(ab + a + 0, 0 \circ b) = (0 \cdot 0 + 0 + a, b \circ 0),$$

а це рівносильне тому, що

$$ab = 0,$$

тобто $aA = \{0\}$ та $a \in \operatorname{ann}_l A$. Якщо $(0, u) \in C_F(E)$, то

$$(0, u)(b, 0) = (b, 0)(0, u)$$

для будь-якого $b \in A$, а значить,

$$(0 \cdot 0 + 0 + b, u \circ 0) = (bu + b + 0, 0 \circ u),$$

звідки $bu = 0$ та $u \in \operatorname{ann}_r A$. □

Лема 4.4. *Якщо A – брейс, $a, b \in A$, то $(a, b) \in Z(H(A))$ тоді і тільки тоді, коли $aA = \{0\}$ та $Ab = \{0\} = bA$.*

Доведення. (⇒) Нехай

$$(a, b) \in Z(H(A)).$$

Тоді для довільних елементів $u, v \in A$ знаходимо, що

$$\begin{aligned} (av + a + u, b \circ v) = (a, b)(u, v) = \\ = (u, v)(a, b) = (ub + u + a, v \circ b) \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

тоді і лише тоді, коли

$$\begin{cases} b \circ v = v \circ b, \\ \quad av = ub. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $bv = vb$. Окрім того, при $u = 0$ отримуємо, що $av = 0$ (і, як наслідок, $aA = \{0\}$), а при $v = 0$ випливає, що $ub = 0$ (тобто $Ab = \{0\}$).

(⇐) Оскільки для будь-яких $u, v \in A$ маємо $ub = 0$, $av = 0$, то елемент (a, b) комутує з будь-яким елементом $(u, v) \in H(A)$. □

Нехай S – двобічний ідеал в брейсі A. На множині суміжних класів

$$A/S = \{a + S \mid a \in A\}$$

в звичайний спосіб вводиться дві операції [93]:

- додавання
$$(a_1 + S) + (a_2 + S) = (a_1 + a_2) + S,$$
- множення
$$(a_1 + S)(a_2 + S) = (a_1 a_2) + S$$

для елементів $a_1, a_2 \in A$. Тоді $(A/S, +, \cdot)$ – брейс, який називається *фактор-брейсом* брейса A за ідеалом S.

Зауваження 4.1. *Зрозуміло, що для елемента a із брейса A централізатори*

$$C_{A^\circ}(a) = \{z \in A \mid z \circ a = a \circ z\}$$

та

$$C_A(a) = \{z \in A \mid za = az\}$$

співпадають. Окрім того, якщо $z_1, z_2 \in C_{A^\circ}(a)$, то

$$(z_1 z_2)a = (az_1)z_2.$$

Справді, $z_1 \circ z_2 \in C_{A^\circ}(a)$, а тому

$$z_1 \circ z_2 + a + (z_1 z_2)a + z_1 a + z_2 a = (z_1 \circ z_2) + a + (z_1 \circ z_2)a =$$

$$= ((z_1 \circ z_2) \circ a = a \circ (z - 1 \circ z_2) = a + z_1 \circ z_2 + a(z_1 \circ z_2) =$$

$$= a + z_1 \circ z_2 + (az_1)z_2 + az_1 + az_2,$$

а звідси випливає стверджуване.

Розглянемо центри

$$Z(A) = \{z \in A \mid za = az \quad \text{для будь-якого} \quad a \in A\}$$

та

$$Z_1 = Z(A^\circ) = \{z \in A \mid z \circ a = a \circ z \quad \text{для будь-якого} \quad a \in A\}.$$

Зрозуміло, що

$$Z(A) = Z(A^\circ) \lhd A^\circ.$$

В праці [93] розглядається дистрибутивна частина

$$A_\circ = \{x \in A \mid x(a+b) = xa + xb \quad \text{для будь-яких} \quad a, b \in A\}$$

і занотовано, що має місце включення

$$Z(A^\circ) \subseteq A_\circ.$$

Окрім того, брейс $A_\circ$ є асоціативним, а тому є найбільшим радикальним підкільцем в A.

Лема 4.5. *Якщо S – ідеал брейса A, то*

$$(A/S)^\circ \cong A^\circ/S^\circ.$$

Доведення. Правило

$$\begin{cases} \varphi : (A/S)^\circ \to A^\circ/S^\circ, \\ \qquad \varphi(a+S) = a \circ S^\circ \end{cases}$$

є відображенням. Окрім того, для довільних елементів $a, b \in A$ знаходимо, що

$$\varphi\left((a+S) \circ (b+S)\right) = \varphi\left((a+S) + (b+S) + (a+S)(b+S)\right) =$$

$$= \varphi\left((a+b+ab)+S\right) = (a \circ b) \circ S^{\circ} =$$

$$= (a \circ S^{\circ}) \circ (b \circ S^{\circ}) = \varphi(a+S) \circ \varphi(b+S),$$

тобто φ – гомоморфізм груп. За побудовою φ є сюр'єкцією. Якщо

$$a \circ S^{\circ} = b \circ S^{\circ},$$

то для будь-якого елемента $s \in S = S^{\circ}$ дістаємо, що

$$a+s+as = b+s+bs,$$

тобто

$$a+as = b+bs.$$

Але тоді

$$a+S = a+(as+S) = b+(bs+S) = b+S.$$

Це означає, що φ – ін'єкція і, як наслідок, φ – ізоморфізм груп.

□

Лема 4.6. *Якщо S – ідеал брейса A, то*

$$H(A)/H(S) \cong H(A/S).$$

Доведення. Припустимо, що

$$H(A) = E \rtimes F,\ H(S) = U \rtimes W \text{ та } H(A/S) = Q \rtimes R.$$

Тоді $U \leq E$, $W \leq F$, а тому

$$H(A)/H(S) = (E \rtimes F)/H(S) =$$

$$= (EH(S)/H(S)) \rtimes (FH(S)/H(S)) =$$

$$= (EUW/UW) \rtimes (FUW/UW) \cong (EW/UW) \rtimes (FU/UW)\,.$$

Позаяк мають місце ізоморфізми груп

$$Q \cong (A/S)^+ \cong A^+/S^+ \cong E/U \cong EW/UW$$

та

$$R \cong (A/S)^\circ \cong A^\circ/S^\circ \cong F/W = FU/WU,$$

то отримуємо стверджуване. □

ВИСНОВКИ.

По-аналогії з асоційованою групою радикального (в сенсі Джекобсона) кільця, введено в розгляд групу, яка асоційована з брейсом. Встановлено залежності між асоційованою групою ідеала в брейсі і асоційованою групою брейса (леми 4.1 та 4.2).

4.2. Групи Фробеніуса

Нагадаємо, що група $H = E \rtimes F$ називається *групою Фробеніуса* із ядром E і доповненням F, якщо виконуються дві такі умови:

- $F \bigcap F^g = \langle 1 \rangle$ – одинична група для всіх $g \in H \setminus F$;
- $$E \setminus \langle 1 \rangle = H \setminus \bigcup_{h \in H} F^h.$$

Огляд про нескінченні групи Фробеніуса опубліковано А. Старостіним в 1971 році [17]. Після цього В. Блудов [10] встановив, що кожна група вкладається в ядро деякої групи Фробеніуса, при цьому доповненням може бути будь-яка нетривіальна група, що упорядкована справа (яка завжди є групою без скруту).

Наступна теорема встановлює необхідну і достатню умову, за якої група $H(L, T)$ є групою Фробеніуса.

Теорема 4.1. *Нехай M – модуль над брейсом A, L – ненульовий підмодуль із M, T – ненульова підгрупа приєднаної групи A°. Тоді*

$$H = H(L, T) = E \rtimes F$$

– група Фробеніуса із ядром E і доповненням F тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

(i) $L = Lh$ для будь-якого ненульового елемента $h \in T$;

(ii) $\mathrm{ann}_T(l) = \{t \in T \mid lt = e\} = \{0\}$ для кожного ненульового елемента $l \in L$.

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $H = E \rtimes F$ – група Фробеніуса з ядром $E \cong (L, +)$ і доповненням $F \cong T$. За твердженням 1.25 для будь-яких елементів $h \in T$ та $l \in L$ знайдеться такий елемент $l_1 \in L$, що

$$(l, 0) = [(l_1, 0), (e, h)].$$

Тоді знаходимо

$$(l, 0) = (l_1, 0)^{-1}(e, h)^{-1}(l_1, 0)(e, h) =$$

$$= (-l_1 - l_1 0^{(-1)}, 0^{(-1)})(-e - eh^{(-1)}, h^{(-1)})(l_1, 0)(e, h) =$$

$$= (l_1, 0)(e, h^{(-1)})(l_1, 0)(e, h) =$$

$$= (-l_1 h^{(-1)} - l_1 + e, 0 \circ h^{(-1)})(l_1 h + l_1 + e, 0 \circ h) =$$

$$= (-l_1 h^{(-1)} - l_1, h^{(-1)})(l_1 h + l_1, h) =$$

$$= ((-l_1 h^{(-1)} - l_1)h - l_1 h^{(-1)} - l_1 + l_1 h + l_1, h^{(-1)} \circ h) =$$

$$= (-(l_1 h^{(-1)})h - l_1 h - l_1 h^{(-1)} + l_1 h, 0) =$$

$$= (-l_1(h^{(-1)} \circ h) + l_1 h, 0) = (l_1 h, 0),$$

на підставі чого

$$l = l_1 h.$$

Це означає, що $L = Lh$ для кожного ненульового елемента $h \in T$.

Із означення групи Фробеніуса також випливає, що перетин

$$F^{(a,b)} \bigcap F = \langle (e, 0) \rangle$$

тривіальний для кожного елемента $(a, b) \in H \setminus F$. Припустимо, що елемент $t \in T$ є таким, що $lt = e$ для певного елемента $l \in L$. Тоді

$$F \bigcap F^{(l,0)} \ni (e, t)^{(l,0)} = (l, 0)^{-1}(e, t)(l, 0) =$$

$$= (-l - l0^{(-1)}, 0^{(-1)})(e, t)(l, 0) = (-l, 0)(e, t)(l, 0) =$$

$$= (-lt - l + e, 0 \circ t)(l, 0) = (-lt - l, t)(l, 0) =$$

$$= ((-lt - l)0 - lt - l + l, t \circ 0) = (-lt, t) = (e, t),$$

а значить, $t = 0$.

Отже, $\operatorname{ann}_T l = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Нехай група $H = E \rtimes F$ задовольняє умови (i), (ii) та v – довільний ненульовий елемент із T, а k – довільний елемент із L. Тоді

$$k = k_1 v$$

для певного елемента $k_1 \in L$ та

$$[(k_1, 0), (e, v)] = (k_1, 0)^{-1}(e, v)^{-1}(k_1, 0)(e, v) =$$

$$= (-k_1 - k_1 0^{(-1)}, 0^{(-1)})(-e - ev^{(-1)}, v^{(-1)})(k_1 v + k_1 + e, 0 \circ v) =$$

$$= (-k_1, 0)e, v^{(-1)})k_1 v + k_1, v) =$$

$$= (-k_1 v^{(-1)} - k_1 + e, 0 \circ v^{(-1)})(k_1 v + k_1, v) =$$

$$= (-k_1 v^{(-1)} - k_1, v^{(-1)})(k_1 v + k_1, v) =$$

$$= ((-k_1 v^{(-1)} - k_1)v - k_1 v^{(-1)} - k_1 + k_1 v + k_1, v^{(-1)} \circ v) =$$

$$= (-(k_1 v^{(-1)})v - k_1 v - k_1 v^{(-1)} + k_1 v, 0) =$$

$$= (k_1 v, 0) = (k, 0),$$

а тому має місце рівність

$$E = [E, (e, t)]$$

для будь-якого ненульового елемента $(e, t) \in F$.

Для довільного елемента $(u, v) \in H$ та $(e, t) \in F$ обчислюємо

$$F^{(u,v)} \ni (e, t)^{(u,v)} =$$

$$= (u, v)^{-1}(e, t)(u, v) = (-u - uv^{(-1)}, v^{(-1)})(e, t)(u, v) =$$

$$= (-u - uv^{(-1)}, v^{(-1)})(ev + e + u, t \circ v) =$$

$$= (-u - uv^{(-1)}, v^{(-1)})(u, t \circ v) =$$

$$= ((-u - uv^{(-1)})(t \circ v) - u - uv^{(-1)} + u, v^{(-1)} \circ t \circ v) =$$

$$= (-u(t \circ v) - (uv^{(-1)})(t \circ v)uv^{(-1)}, v^{(-1)} \circ t \circ v) =$$

$$= (-(ut)v - ut - uv - ((uv^{(-1)})t)v - (uv^{(-1)})t-$$

$$-(uv^{(-1)})v - uv^{(-1)}, v^{(-1)} \circ r \circ v) =$$

$$= (-u(v^{(-1)} \circ v) - (ut)v - ut-$$

$$-((uv^{(-1)})t)v - (uv^{(-1)})t, v^{(-1)} \circ t \circ v) =$$

$$= (-(ut)v - ut - ((uv^{(-1)})t)v - (uv^{(-1)})t, v^{(-1)} \circ t \circ v).$$

Зокрема, при $v = 0$ та $u \neq 0$ отримуємо, що

$$F^{(u,0)} \ni (e,t)^{(u,0)} = (-ut, t).$$

Якщо u пробігає L, то $-ut$ також пробігає L. Це означає, що

$$H \setminus \bigcup_{(u,v) \in H} F^{(u,v)} = E \setminus \{(e,0)\}.$$

Припустимо, що елемент

$$(e,h)^{(u,v)} \in F \bigcap F^{(u,v)}$$

для деяких $h, v \in T$ та $0 \neq u \in L$. Тоді знаходимо, що

$$(e,h)^{(u,v)} = (u,v)^{-1}(e,h)(u,v) =$$

$$= ((e,v)(u,0))^{-1}(e,h)((e,v)(u,0)) =$$

$$= (u,0)^{-1}((e,v)^{-1}(e,h)(e,v))(u,0) =$$

$$= (-u,0)((e,v^{(-1)})(e,h)(e,v))(u,0) =$$

$$= (-u,0)((eh + e + e, v^{-1} \circ h)(e,v))(u,0) =$$

$$= (-u,0)((e, v^{(-1)} \circ h)(e,v))(u,0) =$$

$$= (-u,0)(ev+e+e, v^{(-1)} \circ h \circ v)(u,0) =$$

$$= (-u,0)(e, v^{(-1)} \circ h \circ v)(u,0) =$$

$$= (-u(v^{(-1)} \circ h \circ v) - u + e, 0 \circ v^{(-1)} \circ h \circ v)(u,0) =$$

$$= (-u(v^{(-1)} \circ h \circ v) - u, v^{(-1)} \circ h \circ v)(u,0) =$$

$$= ((-u(v^{(-1)} \circ h \circ v) - u)0 - u(v^{(-1)} \circ h \circ v) - u + u, v^{(-1)} \circ h \circ v \circ 0) =$$

$$= (-u(v^{(-1)} \circ h \circ v), v^{(-1)} \circ h \circ v),$$

а звідси

$$-u(v^{(-1)} \circ h \circ v) = e.$$

На підставі умови (ii) отримуємо рівність

$$v^{(-1)} \circ h \circ v = 0$$

(тобто $h = 0$). Це означає, що перетин тривіальний:

$$F \cap F^{(u,v)} = \{(e,0)\}.$$

Таким чином, $H = H(L,T)$ – це група Фробеніуса з ядром E і доповненням F. □

Нехай R – асоціативне кільце з одиницею 1, A – правий R-модуль. Якщо $\mu : A \to U(R)$ – таке адитивне відображення, що

$$\mu(a\mu(b)) = \mu(a)$$

для всіх елементів $a, b \in A$, то $(A, +, \cdot)$ – брейс (див. [92]) із множенням $" \cdot "$, визначеним за правилом

$$a \cdot b = a(\mu(b) - 1).$$

Приклад 4.1. Розглянемо брейс із прикладу 3 [92], тобто

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},\ A^+ \cong \mathbb{Z}_6$$

та

$$\mu : A \to U(\mathbb{Z}_6)$$

таке, що

$$\mu(0) = \mu(2) = \mu(4) = 1,$$

$$\mu(1) = \mu(3) = \mu(5) = 5.$$

Якщо для елементів $a, b \in A$ покласти

$$a \cdot b = a(\mu(b) - 1),$$

то $(A, +, \cdot)$ – брейс із табличкою множення (див. табличку 2 із [92]):

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	4	0	4	0	4
2	0	2	0	2	0	2
3	0	0	0	0	0	0
4	0	4	0	4	0	4
5	0	2	0	2	0	2

Нехай $L = \{0, 2, 4\}$. Тоді L є A-модулем. Зрозуміло, що $T = \{0, 5\}$ – підгрупа в A°. Оскільки

$$L \cdot 5 = \{0 \cdot 5, 2 \cdot 5, 4 \cdot 5\} = \{0, 2, 4\} = L$$

та анулятори

$$\mathrm{ann}_T(2) = \{0\} = \mathrm{ann}_T(5)$$

нульові, то $G(L, T)$ – група Фробеніуса.

ВИСНОВКИ.

Знайдено необхідню і достатню умову, за якої група, яка асоційована з брейсом, буде групою Фробеніуса (теорема 4.1). Наведено приклад брейса, асоційована група якого є групою Фробеніуса (приклад 4.1).

4.3. Нільпотентні брейси

Я.П. Сисак [18] встановив, що радикальне кільце R нільпотентне (відповідно гіперцентральне) тоді і тільки тоді, коли його асоційована група $G(R) \cong R^+ \rtimes R^\circ$ нільпотентна (відповідно гіперцентральна). Ю.Б. Іщук [67] досліджував взаємозв'язки між властивостями асоціативного кільця R та його асоційованої групи $G(R)$.

В цьому підрозділі введено в розгляд поняття нільпотентного зліва (відповідно справа) брейса A і досліджено умови періодичності його адитивної A^+ та приєднаної A° груп. Вивчено також взаємозв'язок між нільпотентністю брейса A та його асоційованої групи $H(A)$.

Нагадаємо, що згідно [92]

$$A^{n+1} = A(A^n)$$

та

$$A^{(n+1)} = (A^{(n)})A$$

для будь-якого натурального числа n. Як відомо, $A^{(n)}$ – правий ідеал, а A^n –двобічний ідеал в A.

Лема 4.7. *Для брейса A і натурального числа k підмножина $A^{(k+1)}$ є ідеалом в $A^{(k)}$.*

Доведення. Зрозуміло, що $A^{(k+1)}$ – підгрупа в $A^{(k)}$. Окрім того,

$$A^{(k+1)}A^{(k)} \subseteq A^{(k+1)}A \subseteq A^{(k+2)} \subseteq A^{(k+1)}$$

та

$$A^{(k)}A^{(k+1)} \subseteq A^{(k)}A \subseteq A^{(k+1)},$$

тобто $A^{(k+1)}$ – двобічний ідеал в $A^{(k)}$. □

Лема 4.8. *Нехай A – брейс, p – просте число. Тоді справджуються такі властивості:*

(1) *$H(A)$ – періодична група в тому і тільки тому випадку, коли групи A^+ і A° періодичні;*

(2) *$H(A)$ – p-група в тому і тільки тому випадку, коли A^+ та A° – p-групи.*

Доведення. (1) Нехай a – довільний елемент із A. Оскільки $(a, 0)^n = (0, 0)$ для деякого $n \in \mathbb{N}$, то

$$(na, 0) = (0, 0),$$

а значить, і $na = 0$. Подібно із умови $(0, a)^m = 0$ для певного $m \in \mathbb{N}$ отримуємо, що

$$(0, a^{(m)}) = (0, 0),$$

тобто $a^{(m)} = 0$ (тут $a^{(m)} = (A^{(m-1)})a$ для $m \geq 2$). Навпаки теж вірно.

(2) доводиться подібно як (1). $\square$

Для зручності назвемо брейс A *нільпотентним справа* (відповідно *нільпотентним зліва*), якщо $A^{(n)} = \{0\}$ (відповідно $A^n = \{0\}$) для певного $n \in \mathbb{N}$. Найменше таке натуральне число n називається *правим* (відповідно *лівим*) *індексом нільпотентності* брейса A. Має місце аналог леми 2.4 із [35], який встановлює певні зв'язки між адитивною A^+ і приєднаною A° групами брейса A.

Твердження 4.1. *Нехай A – брейс, який є нільпотентним справа (відповідно нільпотентним зліва), p – просте число. Тоді мають місце такі властивості:*

(i) A^+ – p-група тоді і тільки тоді, коли A° – p-група;

(ii) A^+ – група без скруту тоді і тільки тоді, коли A° – група без скруту.

Доведення. Наведемо міркування для випадку правої нільпотентності. Нехай n – індекс правої нільпотентності брейса A.

(i) Застосуємо індуктивні міркування. Позаяк

$$A^{(n-1)}A^{(n-1)} \subseteq A^{(n-1)}A = \{0\},$$

то $A^{(n-1)}$ – комутативне радикальне кільце і для $A^{(n-1)}$ твердження вірне.

Припустимо, що твердження вірне для для всіх нільпотентних справа брейсів індексу $\leq n$. Нехай A – нільпотентний справа брейс індексу n.

$$\left(A/A^{(2)}\right)^2 \subseteq \left(A/A^{(2)}\right) \cdot \left(A/A^{(2)}\right) = A^{(2)}/A^{(2)} = \{\overline{0}\},$$

то отримуємо ізоморфізми груп

$$\left(A/A^{(2)}\right)^+ \cong \left(A/A^{(2)}\right)^\circ \cong A^\circ/\left(A^{(k)}\right)^\circ$$

і для A твердження також вірне.

(ii) Для довільного натурального числа k відомо, що A^k – ідеал в A, і тоді легко зауважуємо, що маємо ізоморфізми груп

$$(A^k/A^{k+1})^+ \cong (A^k/A^{k+1})^\circ.$$

Як наслідок, отримуємо, що (ii) також справджується. □

Лема 4.9. *Нехай A – брейс. Тоді $Z(H(A)) \neq \{(0,0)\}$ в тому і тільки тому випадку, коли $\operatorname{ann}_l A \neq \{0\}$.*

Доведення. $(\Leftarrow)$ Якщо $0 \neq a \in \operatorname{ann}_l A$, то за лемою 4.3 маємо $(a,0) \in C_E\,(F)$, а це означає, що

$$(0,0) \neq (a,0) \in Z(H(A)).$$

$(\Rightarrow)$ Якщо $(a,0) \in Z(H(A))$ для деякого ненульового елемента $0 \neq a \in A$, то для всіх елементів $u, v \in A$ отримуємо, що

$$(av + a + u, v) = (a,0)(u,v) = (u,v)(a,0) = (u+a, v).$$

Звідси робимо висновок, що $av = 0$, а тому $a \in \operatorname{ann}_l A$. □

Наслідок 4.2. *Нехай A – брейс. Якщо $H(A) = E \rtimes F$ та $Z(H(A)) \nsubseteq E$, то*

$$Z(A) \cap \operatorname{ann}_r A \neq \{0\}.$$

Доведення. Припустимо, що $(a,b) \in Z(H(A))$ та $b \neq 0$. Тоді для будь-якого елемента $u \in A$ знаходимо, що

$$(a+u,b) = (a,b)(u,0) = (u,0)(a,b) = (ub+u+a,b)$$

та

$$(au+a, b \circ u) = (a,b)(0,u) = (0,u)(a,b) = (a, u \circ b).$$

Звідси випливає, що $ub = 0$, $au = 0$ та $b \circ u = u \circ b$. Таким чином, $b \in Z(A)$. □

Теорема 4.2. (1) *Якщо A – ненульовий нільпотентний зліва брейс, то справджуються такі властивості:*

(i) *$H(A)$ – нільпотентна група;*

(ii) $\operatorname{ann} A \neq \{0\}$.

(2) *Якщо A – ненульовий нільпотентний справа брейс, то $H(A)$ – розв'язна група.*

Доведення. (1) Нехай A – ненульовий нільпотентний зліва брейс індексу нільпотентності n. Тоді

$$(A^{n-1})A = \{0\} \text{ та } A^{n-1} \neq \{0\}.$$

Це означає, що $A^{n-1} \subseteq \operatorname{ann}_l A$. Тоді за лемою 4.9 отримуємо, що

$$Z(H(A)) \neq \{(0,0)\}.$$

Оскільки A^{n-1} – двобічний ідеал в A та

$$(A/A^{n-1})^{n-1} = \{\bar{0}\},$$

то індукційними міркуваннями за числом n витягуємо, що $H(A)$ – нільпотентна група. Окрім того, $Z(A^\circ) \lhd A^\circ$, а тому

$$\{0\} \neq (A^{n-1})^\circ \bigcap Z(A^\circ) \subseteq \operatorname{ann} A.$$

(2) За умовою маємо $A^{(n)} = \{0\}$ для деякого додатнього цілого числа n, а значить,

$$A^{(n-1)} \subseteq \operatorname{ann}_r A.$$

Але $\operatorname{ann}_r A$ – двобічний ідеал в брейсі A, а тому $(\operatorname{ann}_r A)^\circ$ – абелева нормальна підгрупа в A°. Нарешті, результат отримуємо індукційними міркуваннями за числом n.

□

Приклад 4.2. *Нехай* $(\mathbb{F}_2)^3$ *– брейс, побудований в праці* [92] *(див. там приклад* 2*) із операцією множення* "$\cdot$"*, яка визначається такою табличкою:*

$\cdot$	000	111	100	011	010	101	001	111
000	000	000	000	000	000	000	000	000
111	000	000	000	000	000	000	000	000
100	000	110	000	001	111	110	111	001
011	000	110	000	001	111	110	111	001
010	000	110	111	110	000	001	111	001
101	000	110	111	110	000	001	111	001
001	000	000	111	111	111	111	000	000
111	000	000	111	111	111	111	000	000

Тоді цей брейс має такі ланцюги

$$A \supset A^{(2)} = \{000, 111, 001, 100\} \supset$$
$$\supset A^{(3)} = \{000, 111\} \supset A^{(4)} = \{000\}$$

та

$$A \supset A^2 = \{000, 111, 001, 100\} = A^3.$$

Це означає, що A *нільпотенний справа та* A *не є нільпотентним зліва. Оскільки*

$$111 \cdot 100 = 000 \neq 110 = 100 \cdot 111,$$

то робимо висновок, що $111 \notin Z(A)$*, а тому*

$$A^{(3)} \cap Z(A) = \{000\}.$$

Якщо $a = 001$ *та* $b = 100$*, то*

$$A^{\circ} = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$$

– діедральна група порядку 8*. Отже,* $H(A)$ *–* 2*-група порядку* 64*, а тому вона є нільпотентною. Якщо* $H(A) = E \rtimes F$*, то за наслідком* 4.2 *маємо* $Z(H(A)) \subseteq E$*.*

ВИСНОВКИ.

Для нільпотентного зліва (відповідно нільпотентного справа) брейса A встановлено, що адитивна група A^+ є p-групою (відповідно групою без скруту) тоді і тільки тоді, коли приєднана група A° є p-групою (відповідно групою без скруту) (твердження 4.1). Доведено, що центр $Z(H(A))$ асоційованої групи $H(A)$ брейса A нетривіальний тоді і тільки тоді, коли лівий анулятор брейса є ненульовий (лема 4.9). Доведено, що для нільпотентного зліва брейса його асоційована група є нільпотентною, а для нільпотентного справа бреса його асоційована група є розв'язною (теорема 4.2). Наведено приклад нільпотентного справа брейса, асоційована група якого не є нільпотентною (приклад 4.2).

Висновки до розділу 4

В цьому розділі досліджуються зв'язки властивостей брейса з властивостями його адитивної і приєднаної груп.

В підрозділі 4.1, по-аналогії з асоційованою групою радикального (в сенсі Джекобсона) кільця, побудованою Я.П. Сисаком, введено в розгляд групу $H(A)$, яка асоційована з брейсом A. Встановлено залежності між асоційованою групою ідеала в брейсі і асоційованою групою брейса (леми 4.1 та 4.2).

В підрозділі 4.2 знайдено необхідню і достатню умову, за якої група, яка асоційована з брейсом, буде групою Фробеніуса (теорема 4.1). Наведено приклад брейса, асоційована група якого є групою Фробеніуса (приклад 4.1).

В підрозділі 4.3 для нільпотентного зліва (відповідно нільпотентного справа) брейса A встановлено, що адитивна група A^+ є p-групою (відповідно групою без скруту) тоді і тільки тоді, коли приєднана група A° є p-групою (відповідно групою без скруту) (твердження 4.1). Доведено, що центр асоційованої групи брейса нетривіальний тоді і тільки тоді, коли лівий анулятор брейса є ненульовий (лема 4.9). Доведено, що для нільпотентного зліва брейса його асоційована група нільпотентна, а для нільпотентного справа бреса його асоційована група розв’язна (теорема 4.2). Наведено також приклад нільпотентного справа брейса, асоційована група якого не є нільпотентною (приклад 4.2).

Висновки

Перший розділ допоміжний, він не містить нових результатів. У ньому викладено основні поняття і сформульовано результати, що використовуються в наступних розділах дисертації. Також коротко наведено основні результати даної дисертаційної роботи.

В *другому* розділі досліджуються групи з умовою мінімальності для підгруп, які не є узагальнено нільпотентними.

В підрозділі 2.1 встановлено, що локально ступінчата група, яка не є розширенням черніковської групи за допомогою абелевої групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, що не є розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих (наслідок 2.1). Подібно доведено, що локально ступінчаста група, яка не є розширенням абелевої групи за допомогою черніковської групи, має нескінченний строго спадний ланцюг підгруп, що не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських (наслідок 2.1). Встановлено, що недосконала локально ступінчата група із власними нормальними підгрупами, які є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, сама є такою (твердження 2.1). Із отриманих результатів випливає, що не існує груп, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою абелевих груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими, та не існує груп, які не є розширеннями абелевих груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими.

В підрозділі 2.2 охарактеризовано групи без неодиничних досконалих секцій, що задовольняють умову мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних груп (теорема 2.1).

В підрозділі 2.3 встановлено, що існують групи, які не є розширеннями черніковських груп за допомогою нільпотентних груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими (тобто мінімальні не ČN-групи). Доведено, що недосконала група є мінімальною не ČN-групою тоді і тільки тоді, коли вона є групою типу Хайнекена-Мохамеда (теорема 2.2). Зазначимо, що з результатів досліджень Ф. Наполітані, Е. Пегораро [78] та Х. Отала, Х. Пени [81] випливає, що не існує груп, які не є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп, в той час, як всі їх власні підгрупи є такими (тобто мінімальних не NČ-груп).

В підрозділі 2.4 доведено, що в групі G, яка задовольняє умову мінімальності для ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп, кожна підгрупа, що є мінімальною ненільпотентною (відповідно мінімальною негіперцентральною) групою, субнормальна в G (теорема 2.3).

Встановлено також, що ненільпотентна (відповідно негіперцентральна) локально нільпотентна група G, яка задовольняє умову $Min - \overline{N}$ (відповідно $Min - \overline{ZA}$) з нільпотентними (відповідно гіперцентральними) нормальними власними підгрупами, є мінімальною ненільпотентною (відповідно негіперцентральною) групою (наслідок 2.2).

В *третьому* розділі досліджуємо періодичні групи без неодиничних досконалих секцій з умовою максимальності $Max - \overline{AF}$ для не майже абелевих підгруп.

Описано групи без неодиничних досконалих секцій з умовою максимальності для не майже абелевих підгруп, всі власні нормальні підгрупи яких є майже абелевими (твердження 3.1).

Охарактеризовано також групи з квазіциклічним гомоморфним образом за комутантом, які задовольнять умову максимальності для не майже абелевих підгруп (наслідок 3.1).

В цьому *четвертому* розділі досліджуються зв'язки властивостей брейса з властивостями його адитивної і приєднаної груп.

По-аналогії з асоційованою групою радикального (в сенсі Джекобсона) кільця, побудованою Я.П. Сисаком, введено в розгляд групу, яка асоційована з брейсом.

Встановлено залежності між асоційованою групою ідеала в брейсі і асоційованою групою брейса (леми 4.1 та 4.2).

Знайдено необхідню і достатню умову, за якої група, яка асоційована з брейсом, буде групою Фробеніуса (теорема 4.1). Наведено приклад брейса, асоційована група якого є групою Фробеніуса (приклад 4.1).

Для нільпотентного зліва (відповідно нільпотентного справа) брейса A встановлено, що адитивна група A^+ є p-групою (відповідно групою без скруту) тоді і тільки тоді, коли приєднана група A° є p-групою (відповідно групою без скруту) (твердження 4.1).

Показано, що центр асоційованої групи брейса нетривіальний тоді і тільки тоді, коли лівий анулятор брейса є ненульовий (лема 4.9).

Доведено, що для нільпотентного зліва брейса його асоційована група нільпотентна, а для нільпотентного справа бреса його асоційована група розв'язна (теорема 4.2). Наведено приклад нільпотентного справа брейса, асоційована група якого не є нільпотентною (приклад 4.2).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Артемович О. Д. Неразложимые метабелевы группы / О. Д. Артемович // Укр. мат. ж. – 1990. – Т. 42. – С. 1252–1254.

[2] Артемович О. Д. Про групи з майже гіперцентральними власними підгрупами / О. Д. Артемович // Доповіді НАН України. – 1997. – № 5. – С. 7–9.

[3] Артемович О. Д. Розв'язні групи з умовою мінімальності для негіперцентральних підгруп / О. Д. Артемович // Доповіді НАН України. – 1998. – № 11. – С. 7–9.

[4] Артемович О. Д.Групи, багаті $\mathfrak{X}$-підгрупами / О. Д. Артемович, Л. А. Курдаченко // Вісник Львів. унів., сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 218–237.

[5] Артемович О. Д. О локально ступенчатых группах с условием минимальности для некоторой системы негиперцентральных подгрупп / О. Д. Артемович // Укр. мат. ж. – 1999. – Т. 51, № 10. – С. 1425–1430.

[6] Артемович О. Д. Группы с условием максимальности для негиперцентральных подгрупп / О. Д. Артемович // Укр. мат. ж. – 2002. – Т. 53, № 7. – С. 887–896.

[7] Беляев В. В. О бесконечных группах типа Миллера-Морено / В. В. Беляев, Н. Ф. Сесекин // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. – 1975. – V. 26. – P. 369–376.

[8] Беляев В. В. Группы типа Миллера-Морено / В. В. Беляев// Сиб. мат. ж. – 1978. – Т. 19, №3. – С. 509–514.

[9] Беляев В. В. Локально конечные группы, все собственные подгруппы которых почти абелевы / В. В. Беляев// Сиб. мат. ж. – 1983. – Т. 24, №3. – С.11-17.

[10] Блудов В. В. О группах Фробениуса / В. В. Блудов // Сиб. мат. ж. – 1997. – Т.3 8, № 6. – С. 1219–1221.

[11] Зайцев Д. И. Группы с условием максимальности для неабелевых подгрупп / Д. И. Зайцев, Л. А. Курдаченко // Укр. мат. ж. – 1991. – Т. 43, № 7-8. – С. 925–930.

[12] Каргаполов М. И. Теория групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков // М.: Наука, – 1982. – 288 с.

[13] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах / А. Ю. Ольшанский// М.: Наука, – 1989. – 448 с.

[14] Йоник Л. В. Групи з умовою мінімальності для підгруп, які не є розширеннями скінченних груп за допомогою нільпотентних / Л. В. Йоник // Мат. методи і фіз.-мех. поля/ – 2006. – Т. 49, № 2. – С. 12–16.

[15] Йоник Л. В. Групи, багаті на АČ-підгрупи або ČА-підгрупи / Л. И. Йоник // Вісник Львів. унів., сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 149–152.

[16] Скасків Л. В. Періодичні групи з умовою максимальності для не майже абелевих підгруп / О. Д. Артемович, Л. В. Скасків // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 1–5.

[17] Старостін А. І. Про групи Фробеніуса / А. І. Старостін // Укр. мат. ж. – 1971. – Т. 23, № 5. – С. 628–638.

[18] Сысак Я. П. Произведения групп, связанные с радикальными кольцами / Я. П. Сысак // В кн.: Произведения бесконечных групп. Препринт 82.53: Институт математики АН УССР, 1982. – С. 21–35.

[19] Чарин В. С. Замечание об условии минимальности для подгрупп / В. С. Чарин // ДАН СССР. – 1949. – Т. 66, №4. – С. 575–576.

[20] Черников Н. С. Группы с условием π-максимальности и π-слойной максимальности / Н. С. Черников // Мат. заметки. – 2000. – V. 68, No 2. – P. 311–320.

[21] Черников Н. С. Группы с условием π-минимальности и π-слойной минимальности.I / Н. С. Черников // Сиб. мат. ж. – 2001. – Т. 42, № 5. – С. 1193–2006.

[22] Черников Н. С. Группы с условием π-минимальности и π-слойной минимальности.II / Н. С. Черников // Сиб. мат. ж. – 2002. – Т. 43, № 1. – Р. 194–211.

[23] Черников Н. С. Группы с условиями минимальности / Н. С. Черников // Фунд. прикл. мат. – 2008. – Т. 14. – С. 219–235.

[24] Черников С. Н. Бесконечные группы с заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп / С. Н. Черников // Докл. АН СССР. – 196". – Т. 159. – С. 759–760.

[25] Черников С. Н. Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных подгрупп / С. Н. Черников // Мат. заметки. – 1969. – Т. 6. – С. 11–18.

[26] Черников С. Н. Группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп / С. Н. Черников // В. кн.: Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наукова думка, 1971. – С. 96–106.

[27] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами систем подгрупп / С. Н. Черников// М.: Наука, 1980. – 384 с.

[28] Фейс К. Алгебра: Кольца, модули и категории, Том 1 / К. Фейс // М.: Мир, 1977. – 688 с.

[29] Фейс К. Алгебра: Кольца, модули и категории, Том 2 / К. Фейс // М.: Мир, 1979. – 464 с.

[30] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, Том 1 / Л. Фукс // М.: Мир, 1974. – 336 с.

[31] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, Том 2 / Л. Фукс // М.: Мир, 1974. – 416 с.

[32] Хартли Б. О нормализаторном условии и минитранзитивных группах подстановок/ Б. Хартли // Алгебра и логика. – 1974. – Т. 13, №5. – С. 589–602.

[33] Шмидт О. Ю. Группы, всы подгруппы которых специальные / О. Ю. Шмидт // Матем. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

[34] Шунков В. П. Об абстрактных характеризациях некоторых линейных групп / В. П. Шунков// В кн.: Алгебра. Матрицы и матричные группы. – Красноярск, 1970. – С. 3–54.

[35] Amberg B. On the adjoint group of some radical ring / B. Amberg, O. Dickenschied // Bull. Can. Math. – 1995. – V. 38. – P. 262–270.

[36] Artemovych O. D. On indecomposable groups and groups with hypercentral-by-finite proper subgroups / O. D. Artemovych // Publ. Math. Debrecen. – 1998. – Vol. 53. – P. 163–175.

[37] Artemovych O. D. On groups associated with Frobenius groups / O. D. Artemovych // Demonstratio Math. – 1998. – V. 21. – P. 875–878.

[38] Artemovych O. D. Soluble groups with many conditions on nilpotent-by-Černikov subgroups / O. D. Artemovych // Math. Studii. – 2000. – V. 13. – P. 23–32.

[39] Artemovych O. D. Groups with the minimal condition on non-"nilpotent-by-finite" subgroups / O. D. Artemovych // Serdica Math. J. – 2002. – V. 28. – P. 153–162.

[40] Asar A. O. On non-nilpotent p-groups and the normalizer condition/ A. O. Asar // Turkish J. Math. – 1994. – V. 18. – P. 114–129.

[41] Asar A. O. On minimal non-CC-groups, II / A.O. Asar, A. Arikan // Revista Mat. Univ. Compl. Madrid. – 1997. – V. 10, No 1. – P. 31–37.

[42] Asar A. O. Locally nilpotent p-groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Černikov/ A. O. Asar // J. London Math. Soc. – 2000. – V. 61. – P. 412–422.

[43] Brookes C. J. B. Groups with every subgroup subnormal / H. Smith // Bull. London Math. Soc. – 1983. – V. 15. – P. 235–238.

[44] Bruno B. On minimal conditions related to Miller-Moreno type groups / B. Bruno, R. E. Phillips // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1983. – V. 69. – P. 153–168.

[45] Bruno B. On minimal conditions related to Miller-Moreno type groups / B. Bruno, R. E. Phillips // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1983. – V. 69. – P. 153–168.

[46] Bruno B. On groups with "abelian-by-finite" proper subgroups / B. Bruno // Boll. Unione Mat. Ital. – 1984. – V.3-B. – P. 797–807.

[47] Bruno B. Gruppi i cui sottogruppi propri contengono un sottogruppo nilpotente di indice finito / B. Bruno // Boll. Unione Mat. Ital. – 1984. – (6)3-D. – P. 179–187.

[48] Bruno B. Special q-groups and $\mathbb{C}_{p^\infty}$-groups of automorphisms / B. Bruno // Archiv Math. – 1987. – V. 48. – P. 15–24.

[49] Bruno B. On p-groups with "nilpotent-by-finite" proper subgroups / B. Bruno // Boll. Unione Mat. Ital. – 1989. – (7)3-A. – P. 45–51.

[50] Bruno B. On multipliers of Heineken-Mohamed type groups / B. Bruno, R. E. Phillips // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1991. – V. 85. – P. 133–146.

[51] Bruno B. A note on groups with nilpotent-by-finite proper subgroups / B. Bruno, R. E. Phillips // Archiv Math. – 1995. – V. 65. – P. 369–374.

[52] Casolo C. Groups with all subgroups are subnormal / H. Smith // Rend. Accad. Naz. Scie. XL. – 1986. – V. 10, No 1. – P. 247–249.

[53] Casolo C. Nilpotent subgroups of groups with all subgroups subnormal / H. Smith // Bull. London Math. Soc. – 2003. – V. 35. – P. 15–22.

[54] Dedekind R. Über Gruppen deren samtliche Teiler Normalteiler sind / R. Dedekind // Math. Ann. – 1897. – Bd. 48. – S. 548–561.

[55] Dixon M. R. Groups with some minimal conditions on non-nilpotent subgroups / M. R. Dixon, M. J. Evans, H. Smith // J. Group Theory. – 2001. – V. 4. – P. 207–215.

[56] Dixon M. R. Groups with various minimal conditions on subgroups / M. R. Dixon, M. J. Evans, H. Smith // Укр. мат. ж. – 2002. – Т. 54, № 6. – P. 780–787.

[57] Dixon M. R. Locally nilpotent groups with the maximum conditions on non-nilpotent subgroups / M. R. Dixon, L. A. Kurdachenko // Glasgow Math. J. – 2001. – T. 43. – P. 85–102.

[58] Dixon M. R. Groups with the maximum conditions on non-nilpotent subgroups / M. R. Dixon, L. A. Kurdachenko // J. Group Theory. – 2001. – V. 4. – P. 75–87.

[59] de Falco M. Groups satisfying the minimal conditions on non-supersoluble subgroups / M. de Falco // Ricerche Mat. – 1999. – V. XLVIII. – P. 353–360.

[60] Franciosi S. Groups with with many polycyclic-by-nilpotent subgroups / S. Franciosi, F. de Giovanni, Y. P. Sysak // Ricerche Mat. – 1999. – V. XLVIII, No 2. – P. 361–378.

[61] Franciosi S. Groups with with many supersoluble subgroups / S. Franciosi, F. de Giovanni // Ricerche Mat. – 1999. – V. XL, No 2. – P. 321–333.

[62] Hartley B. A note on the normalizer condition / B. Hartley // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1973. – V. 74. – P. 11–15.

[63] Hartley B. Periodic locally soluble groups containing an element of prime order with Černikov centralizer / B. Hartley // Quart. J Math. Oxford, Ser.2. – 1982. – V. 33. – P. 309–322.

[64] Hartley B. Locally graded minimal non-CC-groups are p-groups, II / B. Hartley, J. Otal, J. M. Peña // Archiv Math. – 1991. – V. 57. – P. 209–211.

[65] Heineken H. A group with trivial centre satisfying the normalizer condition / H. Heineken, I. J. Mohamed // J. Algebra. – 1968. – V. 10. – P. 368–376.

[66] Heineken H. Groups with normalizer condition / H. Heineken, I. J. Mohamed // Math. Ann. – 1972. – V. 198. – P. 179–187.

[67] Ishchuk Yu. On associated groups of rings / Yu. Ishchuk // In: Groups St. Andrews 2001 in Oxford. Vol. I. London Math. Soc. Lecture Notes Ser., 304. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. – P. 284–293.

[68] Kurdachenko L. A. The nilpotency of some groups with all subgroups subnormal / L. A. Kurdachenko, H. Smith // Publ. Matematiques. – 1998. – V. 42. – P. 411–421.

[69] Kurdachenko L. A. Groups with the weak maximality condition for nonnilpotent subgroups / L. A. Kurdachenko, N. N. Semko // Укр. мат. ж. – 2006. – T. 58, No 8. – C. 1068–1083.

[70] Kuzucuoglu M. Locally finite minimal non-FC-groups / M. Kuzucuoglu, R. E. Phillips // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1989. – V. 105, No 3. – P. 417–420.

[71] Leinen F. A reduction theorem for perfect locally finite minimal non-FC groups, II / F. Leinen // Glasgow Math. J. – 1999. – V. 41. – P. 81–83.

[72] Lennox J. C. Subnormal subgroups of groups / J. C. Lennox, S. E. Stonehewer // Oxford: Clarendon Press. – 1987. – 253 p.

[73] Lennox J. C. The theory of infinite soluble groups / J. C. Lennox, D. J. S. Robinson // Oxford: Clarendon Press, 2004. – 342 p.

[74] Meldrum J. D. P. On the Heineken-Mohamed groups/ J. D. P. Meldrum // J. Algebra. – 1973. – V. 27. – P. 437–444.

[75] Menegazzo F. Groups of Heineken-Mohamed / F. Menegazzo // J. Algebra. – 1995. – V. 171. – P. 807–825.

[76] Miller G. A. Groups of Heineken-Mohamed / G. A. Miller, H. Mpreno // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – V. 4. – P. 389–404.

[77] Muñoz-Escolano J. M. Periodic linear group with the weak chain conditions on subgroups of infinite central dimension / J. M. Muñoz-Escolano, J. Otal, N. N. Semko // Comm. Algebra. – 2008. – V. 36, No 2. – P. 749–763.

[78] Napolitani F. On groups with nilpotent-by-Černikov proper subgroups / F. Napolitani, E. Pegoraro // Archiv Math. – 1997. – V. 69. – P. 89–94.

[79] Neuman M. F. Groups with many nilpotent subgroups / M. F.Neuman, J. Wiegold // Archiv Math. – 1964. – V. 15. – P. 241–250.

[80] Möhres W. Auflosbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind / W. Möhres // Archiv Math. – 1990. – V. 54. – S. 232–235.

[81] Otal J. Groups in which every proper subgroup is Černikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Černikov/ J. Otal, J. M. Peña // Archiv Math. – 1988. – V. 51. – P. 193–197.

[82] Otal J. Locally graded groups with certain minimal conditions for subgroups, II / J. Otal, J. M. Peña // Publ. Matematiques. – 1988. – V. 32. – P. 151–157.

[83] Otal J. Minimal non-CC-groups, II / J. Otal, J. M. Pena // Comm. Algebra. – 1988. – V. 16, No 6. – P. 1231–1242.

[84] Otal J. Nilpotent-by-Černikov CC-groups / J. Otal, J. M. Pena // J. Austral Math. Soc. – 1992. – A53, No 1. – P. 120–130.

[85] Passman D. The algebraic structure of group rings / D. Passman // John Wiley: New York, 1977. – 720 p.

[86] Phillips R. E. On certain minimal conditions for infinite groups / R. E. Phillips, J. S. Wilson // J. Algebra. – 1978. – V.51. – P. 41–68.

[87] Redei L. Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen / L. Redei // Publ. Math. Debrecen. – 1956. – V.4. – S. 130–138.

[88] Robinson D. J. S. Infinite soluble and nilpotent groups / D. J. S. Robinson // Queen Mary College Math. Notes. – London, 1967. – 226 p.

[89] Robinson D. J. S. Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups, Part 1 / D. J. S. Robinson // Springer-Verlag: Berlin Heidelberg New York, 1972. – 210 p.

[90] Robinson D. J. S. Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups, Part 2 / D. J. S. Robinson // Springer-Verlag: Berlin Heidelberg New York, 1972. – 254 p.

[91] Robinson D. J. S. A course in the theory of groups / D. J. S. Robinson // Springer-Verlag: Berlin Heidelberg New York, 1980. – 481 p.

[92] Rump W. Braces, radical rings, and quantum Yang-Baxter equations / W. Rump // J. Algebra. – 2007. – V. 307. – P. 153–170.

[93] Rump W. Modules over braces / W. Rump // Algebra and Discrete Math. – 2006. – No 2. – P. 127–137.

[94] Smith H. Hypercentral groups with with all subgroups subnormal / H. Smith // Bull. London Math. Soc. – 1983. – V. 15. – P. 229–234.

[95] Smith H. Groups with few non-nilpotent subgroups / H. Smith // Glasgow Math. J. – 1997. – V. 39. – P. 141–151.

[96] Smith H. Residually finite groups with with all subgroups subnormal / H. Smith // Bull. London Math. Soc. – 1999. – V. 31. – P. 679–680.

[97] Smith H. Nilpotent-by-(finite exponent) groups with all subgroups subnormal / H. Smith // J. Group Theory. – 2000. – V. 3. – P. 47–56.

[98] Trabelsi N. Characterization of nilpotent-by-finite groups/ N. Trabelsi // Bull. Austral Math. Soc. – 2000. – V. 61. – P. 31–38.

[99] Xu M. Groups whose proper subgroups are Baer groups / M. Xu // Acta Math. Sinica. – 1996. – V. 12. – P. 10–17.

[100] Xu M. Groups whose proper subgroups are finite-by-nilpotent / M. Xu // Archiv Math. – 1996. – V. 66. – P. 353–359.

[101] Yonyk L. V. Groups with many finite-by-nilpotent subgroup / L. V. Yonyk // In: A conference in Honor of Adalbert Bovdi's 70th Birthday (18–23 November 2005, Debrecen, Hungary). – Debrecen, 2005. – P. 46.

[102] Yonyk L. V. Groups with many hypercentral subgroups /O. D. Artemovych, L. V. Skaskiv // Bul. Acad. Sci. Stiinte Rep. Moldova. Matematica. – 2008. – No 2(57). – P. 106–109.

[103] Yonyk L. V. Groups with minimal condition on non-nilpotent subgroups / L. V. Yonyk // In: II International Conference on Problems of Mechanics and Mathematics (25–28 May 2008, Lviv), Vol. 3. Lviv Pidstryhach Institute for Applied Problem of Mechanics and Mathematics. – Lviv, 2008. – P. 218–219.

[104] Skaskiv L. V. Groups with many Černikov-by-nilpotent subgroups / L. V. Skaskiv, O. D. Artemovych // In: 6th International Algebraic Conference in Ukraine (1–7 July 2007, Kamyanets-Podilsky). Abstracts of Talks. – Kamyanets-Podilsky, 2007. – P. 23.

[105] Skaskiv L. V. On HM*-groups / L. V. Skaskiv // In: 7th International Algebraic Conference in Ukraine (18–23 August 2009, Kharkov). Abstracts of Talks. – Kharkov, 2009. – P. 130–131.

[106] Skaskiv L. V. Groups and braces / L. V. Skaskiv // In: 7th International Algebraic Conference in Ukraine (5–12 July

2011, Lugansk). Abstracts of Talks. – Lugansk, 2011. – P. 132.

[107] Skaskiv L. V. Groups associated with braces /O. D. Artemovych, L. V. Skaskiv // Carpathian Math. Publ. – 2011. – V. 3, No 1. – P. 4–14.

[108] Skaskiv L. V. Groups with many Černikov-by-nilpotent subgroups /O. D. Artemovych, L. V. Skaskiv // Математичний вісник Наукового Товариства імені Шевченка. – 2011. – № 8. – С. 328–334.